

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean GAVORET

1^{re} THÈSE

Application de la théorie des perturbations
à l'étude d'un liquide de Bose au zéro absolu

2^e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 29 Mai 1963 devant la Commission d'examen :

MM. LÉVY

Président

BLANC-LAPIERRE

NOZIÈRES

PINES

} *Examineurs*

MASSON & C^{ie}, ÉDITEURS

120, boulevard Saint-Germain

P A R I S — 1 9 6 3

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean GAVORET

1^{re} THÈSE

Application de la théorie des perturbations
à l'étude d'un liquide de Bose au zéro absolu

2^e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 29 Mai 1963 devant la Commission d'examen :

MM. LÉVY

Président

BLANC-LAPIERRE

NOZIÈRES

PINES

} *Examineurs*

MASSON & C^{ie}, ÉDITEURS

120, boulevard Saint-Germain

P A R I S — 1 9 6 3



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. ZAMANSKY.

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CHAMPETIER ..	T	Chimie macromolécul.	PISOT	T	Techniques mathématiques de la physique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	ROCH	T	Géologie.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	JUNG	T	Pétrographie.	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	WIEMANN	T	Chimie org. et structurale.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).	IENNIER	T	Physique (M.G.P.).
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.	RIZET	T	Génétique (Orsay).
TEISSIER	T	Zoologie.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).	AMIEL	T	Chimie générale.	M ^{me} TONNELAT	T	Physique théorique.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.	DUMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
MONNIER	T	Physiologie générale.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (Optique).	SOUGHAY	T	Chimie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	COUTEAUX	I	Biologie animale (P.C.B.).	AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
ROCARD	I	Physique (E.N.S.).	MAY	T	Zoologie (Orsay).	FRUSSET	T	Chimie systématique
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	CHOQUET	T	Théorie des fonct. et topologie.	M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	FELDMANN	I	Biologie végétale marine.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
FAVARD	I	Géométrie supérieure.	GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).	M ^{me} HUREL-PY	T	Biologie végétale (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du Globe.	JOST	T	Physiologie comparée.	PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biol. animale (S.P.C.N.).	FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	BRUN	T	Mécan. théorique des fluides.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.	LEDERER	T	Chimie biologique.
DRACH	T	Zoologie.	CHOUARD	T	Physiologie végétale	M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques (Agrég.)
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).	M ^{me} LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
EPHROSSI	T	Génétique.	BRELOT	T	Calcul différentiel et intégral.	BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) et Sédim.	NORMANT	T	Synthèse organique générale.	COTTE	T	Physique électrique.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	BÉNARD	T	Chimie minérale.	J.-E. DUBOIS	T	Chimie organique.
R. LUCAS	T	Recherches physiques.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).	LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques	A. MICHEL	T	Chimie minérale (Orsay)
ARNULF	T	Optique appliquée.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.	OLMER	T	Énergétique générale.
MORAND	T	Physique Enseignement.	ULRICH	T	Physiologie végétale.	ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
FORTIER	T	Mécanique expérim. des fluides.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.	PARCHEWITZ	T	Chimie physique.
DANJON	T	Astronomie.	CHADEFAUD	T	Botanique.	BROSSEL	T	Physique atomique.
PETIT	T	Biologie maritime.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.	RUSER	T	Physiologie comparée.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	SALEM	T	Mathématiques générales.	CAMUS	T	Physiologie végétale (B.M.P.V.).
GALLIEN	T	Embryologie.	LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.	CASTAING	T	Physique (Orsay).
EICHORN	T	Botanique.	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.	CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	EHRSMANN	T	Topologie algébrique.	MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).	NOIROT	T	Évolution des êtres organisés.
THELLIER	T	Physique du Globe.	GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).	GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).	POSSOMPES	T	Zoologie.
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)				PULLMANN	T	Chimie théorique.
PONCIN	T	Mécanique générale.				TEILLAC	T	Physique nucléaire et Radioactivité.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.				TONNELAT	T	Biologie physico-chim.
QUELET	T	Chimie organique.				VILLE	T	Économétrie.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.				WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
						DODE	T	Chimie (Orsay).
						FREYMAN	T	Recherches physiques.
						GUINOCHE	T	Biol. végét. (S.P.C.N.) (Orsay).



PROFESSEURS (suite)

ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).	LEMÉE	T	Physiol. vég. (B.M.P.V.) (Orsay).	M ^{lle} FOURCROY ...	Biol. végétale (S.P.C.N.).	
M ^{lle} JOSIEN	T	Chimie (S.P.C.N.).	GUÉRIN	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay).	M ^{me} CHOQUET- BRUHAT	T	Mécanique analytique et mécanique céleste
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	M. CHATELET	T	Chimie (P.C.B.).	M ^{lle} VEIL	Physiologie générale.	
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).	JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).	LWOFF	T	Microbiologie.
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).	MATTLER	T	Physique (S.P.C.N.).	SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	L. MICHEL	T	Physique théor. des hau- tes énergies (Orsay).	LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires.
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).	BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).	BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.	BERTIN	T	Electronique (Orsay).	CABANNES	T	Mécanique générale.
G. LUCAS	T	Géologie.	BOUSSIÈRES	T	Chimie des radioéléments (Orsay).	LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. (Orsay).
ALLARD	T	Chimie physique.	M ^{me} COUTURE	T	Thermodynamique et mé- canique physique	MAZET	T	Mécanique générale (Or- say).
BERTHELOT	T	Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay).	ELLENBERGER ...	T	Géologie appliquée sur le terr.	CAIRE	T	Géographie phys. et Géol. dynamique.
BRICARD	T	Météorologie et physi- que de l'atmosphère	FRANC	T	Biol. animale (P.C.B.).	COMOLET	T	Mécanique des fluides
M ^{me} ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.	SCHNELL	T	Botanique tropicale (Or- say).	CORABOEUF	T	Physiologie animale
FRUEDEL	T	Physique des solides (Orsay).	STOLKOWSKI	T	Physiologie générale.	DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
M. JULIA	T	Études des mol. natu- relles complexes.	ACHER	T	Chimie biol. (Orsay).	GORENFLOT	T	Botanique II (Orsay).
LENDER	T	Biol. animale (S.P.C.N.) (Orsay).	BAUDOUIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	HOUILLOU	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAGAT	T	Physicochimie des radio- éléments.	BEAUMONT	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	J. JULLIEN	T	Chimie (P.C.B.).
M ^{lle} QUINTIN	T	Electrochimie.	BLAMONT	T	Géophysique ionosphère.	MALGRANGE	T	Techn. math. de la Phys
MONOD	T	Chimie du métabolisme.	BOURREAU	T	Botanique.	OLIVIER	T	Anthropologie.
BENOIT	T	Physiol. anim. (Orsay).	D. CURIE	T	Physique (M.G.P.).	NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique.	DURAND-DELGA ...	T	Géologie.	BLANC-LAPIERRE ..	T	Phys. E.N.S. (Orsay).
CHARLOT	T	Chimie analytique.	FRÉON	T	Chimie organique (Or- say).	CREVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
HAÏSSINSKY	T	Radiochimie.	HELLER	T	Physiologie végétale	KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)
			TORTRAT	T	Calcul des probabilités.	SAMUEL	T	Math. (E.N.S. féminine).
			CAILLEUX	T	Géologie (S.P.C.N.).	KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
			MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).	THIRY	T	Mécanique céleste.
			DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la phy- sique nucléaire.			

Secrétaire Général R. POUILLAIN.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude au Professeur M. Lévy et à son groupe qui m'ont enseigné la Physique quantique et ont guidé mes premiers pas dans le domaine de la Recherche. La formation que j'ai reçue doit en particulier beaucoup au Docteur L. Verlet que je prie de trouver ici mes remerciements.

Je remercie le Professeur Y. Rocard de l'hospitalité qu'il m'a offerte au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure où la majeure partie de ce travail a été effectuée.

Je voudrais exprimer ma très sincère reconnaissance au Professeur P. Nozières qui m'a proposé ce sujet de thèse et dont les conseils m'ont constamment guidé au cours de cette étude. La solution proposée dans le présent travail est le fruit d'une collaboration fondée sur une solide amitié.

Je remercie enfin M. Nguyen qui a assuré avec une grande maîtrise l'édition du manuscrit.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE DES HAUTES ÉNERGIES

(Professeur M. LÉVY)

B. P. 12, Orsay (S.-et-O.)

LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

(Professeur P. NOZIÈRES)

24, rue Lhomond, Paris 5^e

APPLICATION DE LA THÉORIE DES PERTURBATIONS A L'ÉTUDE D'UN LIQUIDE DE BOSE AU ZÉRO ABSOLU

Par

JEAN GAVORET

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude du spectre des excitations élémentaires de l'hélium liquide à température nulle. Nous utiliserons les méthodes de la théorie quantique des champs, dont l'application au problème à N corps a été établie par l'école des physiciens russes. Nous pourrions ainsi effectuer un calcul « microscopique » du spectre phénoménologique obtenu par Landau et justifié par Feynman.

L'application des méthodes de perturbations à un système de particules satisfaisant la statistique de Bose-Einstein rencontre un certain nombre de difficultés. Tout d'abord, la présence d'une phase condensée impose de modifier légèrement le formalisme habituel de perturbations, par exemple à l'aide de la prescription classique de Bogoliubov. On peut alors calculer les propriétés du système aux premiers ordres par rapport à l'interaction entre les particules. Ces calculs approchés se heurtent à plusieurs ennuis majeurs :

a) L'interaction entre atomes possède un cœur dur ; les éléments de matrice de l'interaction ne sont donc pas définis. On peut tourner la difficulté en remplaçant l'interaction par une « matrice réaction », incorporant les phénomènes de diffusion multiple entre deux atomes. Il faut alors faire très attention à la duplication de certains diagrammes.

b) Même avec cette interaction « renormalisée », le paramètre du développement reste pour He liquide supérieur à 1. Les calculs aux premiers ordres ne peuvent donc donner que des résultats qualitatifs.

c) Enfin, tous les travaux publiés se heurtent à un paradoxe : il n'est pas possible, à un ordre donné, d'obtenir un spectre d'excitations élémentaires sans « gap », et de vérifier simultanément certaines règles de conservation du système.

Pour pallier ces difficultés, nous avons mis au point une technique diagrammatique qui nous permet, dans

certains cas limites, de sommer tout le développement de perturbation : ce faisant, nous évitons deux des écueils précédents. Sous réserve que le développement converge, la valeur de son paramètre n'a plus d'importance ; par ailleurs, nous verrons que la contradiction inhérente à tout calcul approché disparaît d'un calcul rigoureux.

Il reste le problème du cœur dur. En réalité, ce cœur dur n'est qu'une forme idéalisée d'une interaction fortement répulsive à courte distance. Dans la mesure où les résultats finaux ne font pas intervenir l'interaction, on peut formuler le développement au moyen de l'interaction « non renormalisée » : c'est cette attitude que nous adopterons. Il reste entendu que pour faire un calcul explicite à un ordre donné, la renormalisation est essentielle.

L'application de notre méthode apparaît en revanche limitée aux excitations de grande longueur d'onde, les phonons. Notons que jusqu'à présent, aucun calcul fondé sur les méthodes de perturbations n'a donné de résultat quantitatif dans la région des rotons, de plus courte longueur d'onde. Dans cette région, le problème est beaucoup plus difficile, car il fait intervenir le détail de l'interaction et la structure microscopique des corrélations interatomiques : les calculs approchés effectués jusqu'à présent n'ont qu'une valeur qualitative.

Le premier chapitre est consacré à la définition des excitations élémentaires et à leur détermination expérimentale. Au chapitre II, nous discutons d'abord les calculs variationnels qui ont permis à Feynman de

justifier le modèle phénoménologique proposé par Landau. Nous donnons ensuite une interprétation « microscopique » des résultats qu'il a obtenus. Dans le troisième chapitre, nous retraçons le calcul classique de Bogoliubov qui permet de retrouver le spectre des phonons. Puis nous appliquons le formalisme général des méthodes de la théorie quantique des champs au traitement d'un système de particules satisfaisant la statistique de Bose-Einstein.

Le chapitre IV expose la méthode diagrammatique qui nous permet de sommer le développement de perturbations. En première application, nous effectuons la renormalisation des fonctions de Green à une particule : nous obtenons ainsi les propagateurs des excitations élémentaires de grande longueur d'onde.

Les trois derniers chapitres sont consacrés au calcul d'une classe particulière de fonction de Green à deux particules : les fonctions de corrélation. Au chapitre V, nous montrons comment ces fonctions déterminent la réponse linéaire d'un système à une excitation extérieure faible. Nous explicitons leur structure générale dans le cas d'un système de particules de Bose. Le chapitre VI présente une étude détaillée de l'interaction entre deux excitations élémentaires. Nous dégagons les difficultés fondamentales inhérentes au problème, et nous soulignons les limitations qu'elles introduisent. Le chapitre VII est consacré au calcul des fonctions de corrélation dans la limite des petits transferts d'énergie et de quantité de mouvement, et à la discussion des résultats obtenus.

I. — THÉORIE PHÉNOMÉNOLOGIQUE ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

1. — Modèle de Landau

Il est très difficile de calculer les propriétés thermodynamiques des liquides. On a, en effet, affaire à des systèmes à haute densité où les molécules interagissent fortement. On ne retrouve ni les faibles densités des gaz ni les petites oscillations des atomes dans les solides qui rendent infiniment plus aisé le calcul théorique des propriétés thermodynamiques. Landau a cependant mis au point un modèle phénoménologique permettant d'étudier les propriétés des liquides quantiques au voisinage du zéro absolu.

L'argument essentiel de la théorie de Landau est que l'on peut représenter, en mécanique quantique, les premiers états excités d'un système macroscopique par un ensemble d'excitations élémentaires. Ces excitations élémentaires se conduisent comme des quasi-particules, de quantité de mouvement (que nous appellerons désormais moment suivant la terminologie

anglosaxonne) et d'énergie bien définies ; elles peuvent se déplacer dans tout le volume occupé par le système.

On peut définir qualitativement l'état à une quasi-particule en ajoutant une particule à l'état de base du système idéal, puis en « allumant » adiabatiquement l'interaction. Une quasi-particule apparaît ainsi comme une particule réelle, « habillée » par l'interaction, par opposition au concept de particule « nue » composant le système idéal. A chaque valeur du moment $\hbar\vec{q}$ correspond une valeur ε_q de l'énergie de la quasi-particule : nous appelons « spectre » des quasi-particules la courbe $\varepsilon_q = f(\hbar\vec{q})$. En général, ε_q sera très différent de l'énergie $\varepsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ d'une particule nue dans un système sans interaction.

En pratique, on ne peut observer que très rarement la création ou l'annihilation d'une quasi-particule unique de moment $\hbar\vec{q}$. L'expérience a presque toujours pour effet d'exciter une quasi-particule en lui transfé-

rant un certain moment $\hbar\vec{k}$. Nous sommes ainsi amenés à rechercher la structure du spectre d'excitation des quasi-particules. Nous devons alors distinguer deux cas suivant la statistique des particules du système.

1) **Liquide de Bose** : à température nulle, l'état de base du gaz parfait est l'état condensé de Bose-Einstein où toutes les particules sont dans l'état de moment et d'énergie nuls. Il n'existe alors qu'une excitation de moment $\hbar\vec{k}$, obtenue en excitant une particule de la phase condensée, puis en branchant l'interaction. Il est assez évident, et nous le vérifierons dans le cadre de ce travail, que les notions de quasi-particule et d'excitation sont équivalentes. Nous les appellerons le plus souvent excitations élémentaires.

2) **Liquide de Fermi** : le système sans interaction possède toute une gamme d'excitations de moment $\hbar\vec{k}$, obtenues en faisant passer une particule de l'état $\hbar\vec{q}$ à l'état $\hbar(\vec{q} + \vec{k})$. En vertu du principe d'exclusion, q doit être inférieur au vecteur d'onde de Fermi q_F , et $|\vec{q} + \vec{k}|$ supérieur à q_F . Ces caractéristiques se conservent lorsqu'on établit l'interaction entre particules. Il convient donc, dans ce cas, de distinguer les états obtenus en *ajoutant* ou en *excitant* une quasi-particule, qui sont de nature complètement différente.

Le présent travail est consacré à l'étude des liquides de Bose, c'est-à-dire, en pratique, à ^4He liquide, dans sa phase superfluide, notée He II. D'après la discussion précédente, les notions de quasi-particules et d'excitations élémentaires sont en ce cas équivalentes (ce qui apparaîtra d'ailleurs clairement dans le développement de nos calculs). On peut alors caractériser l'état du système par une certaine *distribution* d'excitations élémentaires. A très basse température, seuls les états faiblement excités interviendront dans le calcul des propriétés thermodynamiques de He II. Ces états ne contiendront qu'un petit nombre d'excitations élémentaires occupant le volume total du liquide. Nous pourrions alors supposer qu'elles n'interagissent pas entre elles et les traiter comme un gaz parfait. C'est là l'esprit de la méthode de Landau.

Il est bien évident que les quasi-particules sont des bosons (puisque'elles dérivent des particules nues). Dans le système en équilibre thermodynamique à la température T , le nombre d'excitations élémentaires de moment compris entre $\hbar\vec{k}$ et $\hbar(\vec{k} + d\vec{k})$ est donné par :

$$dN_k = \frac{V}{2\pi^2} \frac{k^2 dk}{e^{\epsilon_k/kT} - 1}.$$

Connaissant cette distribution, on peut calculer aisément l'énergie, la chaleur spécifique, et toutes les autres propriétés thermodynamiques du système.

La clé de ces calculs est donc le spectre ϵ_k . Landau a procédé en sens inverse : partant des données thermodynamiques déterminées expérimentalement, il en a déduit le spectre phénoménologique représenté sur la figure ci-dessous :

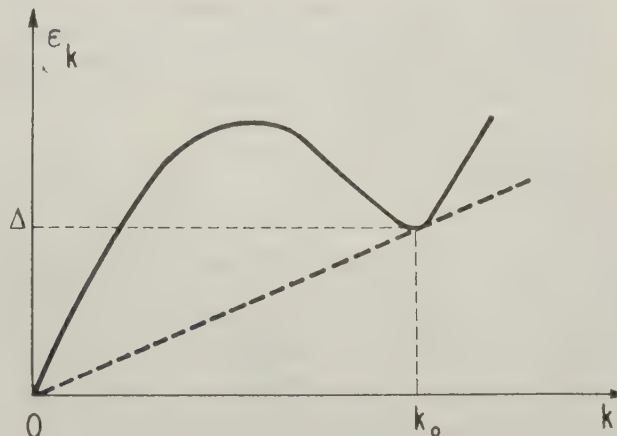


FIG. I.

Ce spectre comprend deux régions principales :

a) k petit : les excitations sont des phonons $\epsilon_k = \hbar ck$ où $c = 240$ m/s est la vitesse du son dans He II. Ceci traduit le fait expérimental que la chaleur spécifique varie en T^3 à basse température ;

b) au voisinage de $k_0 = 2 \text{ \AA}^{-1}$, on observe un minimum du spectre. Pensant que ces excitations représentaient une sorte de rotation du fluide, Landau les a appelées « rotons ». Ils satisfont la relation de dispersion :

$$\epsilon_k = \Delta + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2\mu} \quad \text{avec} \quad \Delta/k = 8.09 \text{ K}, \quad (1.1)$$

$$k_0 = 2 \text{ \AA}^{-1} \quad \mu \approx 0.25 m_{\text{He}}.$$

Le spectre de Landau permet d'expliquer très simplement le phénomène de superfluidité à température nulle. Considérons de l'hélium au zéro absolu s'écoulant entre deux parois fixes, avec une vitesse de translation $v = \frac{\hbar q}{m}$. Les excitations élémentaires du fluide en mouvement sont différentes de celles du fluide au repos : soit $\epsilon_k(v)$ leur énergie. L'écoulement ne peut se ralentir que par création spontanée d'excitations élémentaires, donnant naissance à une certaine viscosité. A température nulle, ceci n'est possible que s'il existe des valeurs de k telles que $\epsilon_k(v)$ soit < 0 . Dans la mesure où cette condition n'est satisfaite qu'au-delà d'une certaine vitesse « critique », l'écoulement devient superfluide, et ne subit aucun freinage. Nous sommes ainsi amenés à calculer l'énergie d'excitation $\epsilon_k(v)$ dans un fluide en mouvement.

L'hamiltonien du système au repos est :

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V,$$

V ne dépend que des positions relatives des particules et n'est pas modifié par le mouvement de translation : seule l'énergie cinétique change. L'hamiltonien apparent, où les coordonnées sont exprimées dans un repère entraîné par le fluide, est donc égal à :

$$H_q = \sum_i \frac{(\vec{p}_i + \hbar \vec{q})^2}{2m} + V = H + \hbar \vec{q} \cdot \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m} + N \frac{\hbar^2 q^2}{2m}.$$

L'énergie du liquide en mouvement ne contenant pas d'excitation est donnée par $E_{q_0} = E_0 + N \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$, car l'état fondamental du système est invariant, par réflexion, ce qui entraîne $\left\langle \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m} \right\rangle = 0$. Après apparition de l'excitation $\hbar \vec{k}$, l'énergie devient :

$$E_q = E_0 + \varepsilon_k + \hbar \vec{q} \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m} + N \frac{\hbar^2 q^2}{2m}.$$

Dans le fluide en mouvement, l'énergie d'excitation $\varepsilon_k(\nu)$ est donc égale à $(\varepsilon_k + \hbar \vec{\nu} \cdot \vec{k})$. L'écoulement ne peut se freiner que si la condition $\nu > \frac{\varepsilon_k}{\hbar k}$ est satisfaite pour certaines valeurs de k .

Reportons-nous au spectre de Landau : les excitations élémentaires de grande longueur d'onde étant des phonons $\varepsilon_k = \hbar c k$, la valeur minimum du rapport $\frac{\varepsilon_k}{\hbar k}$ est donnée par la pente de la tangente au spectre passant par l'origine (représentée en pointillés sur la figure). Si le spectre avait un départ parabolique, comme

pour des particules libres, la condition $\nu > \frac{\varepsilon_k}{\hbar k}$ serait toujours satisfaite pour $k \rightarrow 0$: on voit donc clairement que le phénomène de superfluidité est essentiellement lié à l'existence des phonons.

En réalité, les conclusions précédentes ne sont pas vérifiées par l'expérience, les vitesses critiques observées étant très inférieures à celles que nous venons de calculer. L'explication de ce paradoxe, proposée par Feynman, repose sur l'existence d'excitations élémentaires différentes, constituées par des lignes de tourbillon du type rencontré en hydrodynamique. La vitesse critique n'a donc rien à voir avec le spectre des quasi-particules. Néanmoins, l'existence d'un spectre linéaire lorsque $k \rightarrow 0$ reste une condition nécessaire, sinon suffisante, pour observer la superfluidité.

À l'origine, Landau avait déduit les principales caractéristiques du spectre ε_k des propriétés thermodynamiques de He II. Depuis, on a réussi à mesurer

directement le spectre des excitations élémentaires, par diffraction de neutrons. Ces expériences ont apporté une confirmation éclatante du modèle de Landau. Nous allons maintenant les analyser.

2. — Diffusion inélastique de neutrons lents par He II

Dès 1954, Placzek et Van Hove ont proposé d'utiliser la diffusion inélastique de neutrons lents pour déterminer expérimentalement le spectre des phonons dans les solides. En effet, dans un processus de diffusion inélastique, le neutron transfère une partie *mesurable* de son énergie et de son moment. Soit un faisceau monochromatique de neutrons incidents de moment $\hbar \vec{k}_0$. Supposons qu'un neutron diffusé dans un angle φ émerge avec le moment $\hbar \vec{k}_f$. Cette situation est représentée sur la figure ci-dessous :

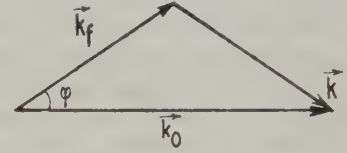


FIG. 2.

Le transfert d'énergie est,

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} \quad \left. \vphantom{\varepsilon_k} \right\} \quad (1.2)$$

correspondant au transfert de moment :

$$k^2 = k_f^2 + k_0^2 - 2k_0 k_f \cos \varphi.$$

Cohen et Feynman ont étudié la possibilité d'utiliser cette technique pour déterminer expérimentalement le spectre des excitations élémentaires de He II. Considérons le système au repos au zéro absolu, ne contenant par conséquent aucune excitation élémentaire. Un neutron thermique incident pourra interagir avec le liquide et créer une excitation élémentaire ε_k . Cela se traduira par un pic discret de la section efficace différentielle $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon}$ dans la direction rendant compatibles les équations (1.2) et la relation de dispersion $\varepsilon_k = f(\hbar k)$.

Le neutron peut aussi créer plusieurs excitations élémentaires dont l'énergie totale varie continûment en fonction de l'énergie des composantes : on observera alors un fond continu de la section efficace différentielle. À température non nulle, il faut en outre tenir compte des processus d'annihilation, le système au repos contenant une distribution thermique d'excita-

tions élémentaires. L'annihilation d'une seule excitation se traduira par un pic immergé dans le continuum correspondant aux processus d'annihilation ou de création de plusieurs excitations. On a intérêt à éliminer au maximum les processus d'annihilation, qui compliquent beaucoup l'interprétation des résultats. Le nombre d'excitations initialement présentes dépend fortement de la température ; l'expérience devra donc être tentée à une température aussi basse que possible, soit $T \lesssim 2^\circ \text{K}$.

De même, la longueur d'onde des neutrons incidents est un paramètre essentiel. Par exemple, la production d'un phonon devient cinématiquement impossible si $\lambda_i > 16,5 \text{ \AA}$. Par contre, si les neutrons incidents sont trop énergiques, ils ne « voient » plus la structure du liquide.

L'expérience a été réalisée par de nombreux expérimentateurs. Nous donnerons les résultats de la plus récente qui nous paraît être la plus complète. Suivant les résultats de la discussion de Cohen et Feynman, Henshaw et Woods ont étudié la distribution en énergie des neutrons diffusés par He II à $1^\circ 12 \text{ K}$ pour un faisceau incident de longueur d'onde $\lambda_i = 4,04 \text{ \AA}$.

Dans la diffusion à un angle donné, ils ont réussi à faire la discrimination en énergie des neutrons émergents ; en d'autres termes, ils mesurent la section efficace différentielle $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon}$ qui a l'allure suivante :

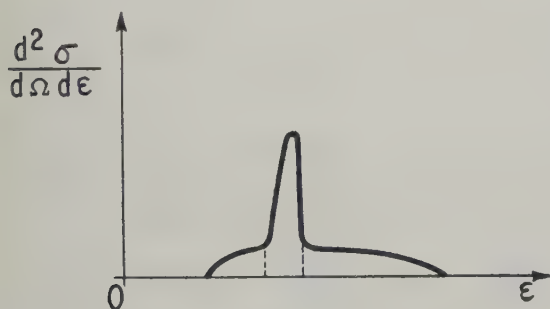


FIG. 3.

On voit apparaître un pic correspondant à l'émission d'une seule excitation élémentaire. On peut alors résoudre le système d'équations (1.2) et déterminer le spectre des quasi-particules. Le résultat de Henshaw

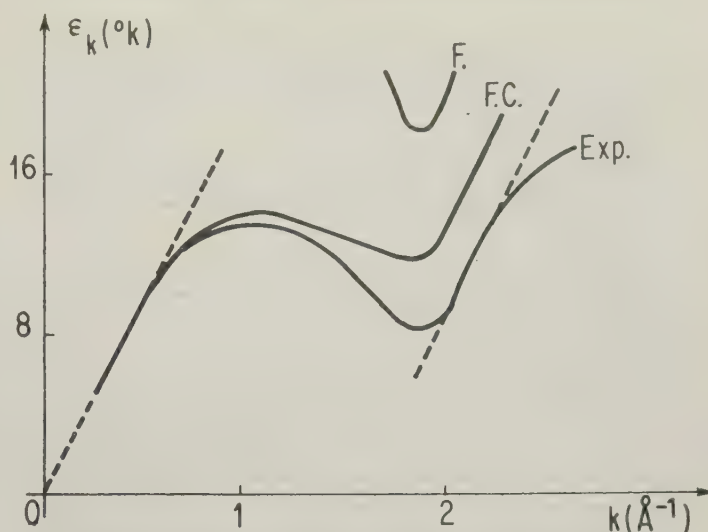


FIG. 4.

et Woods est représenté sur la figure ci-dessus (courbe notée exp.).

Les caractéristiques de ce spectre sont les suivantes :

- a) dans la région des phonons, la vitesse du son est $c = 237 \text{ m/s}$;
- b) le minimum des rotons a toujours l'allure parabolique :

$$\varepsilon_k = \Delta + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2\mu}$$

avec les valeurs :

$$\frac{\Delta}{\kappa} = 806 \text{ K}, \quad k_0 = 1,91 \text{ \AA}^{-1}, \quad \mu = 0,16 m_{\text{He}}. \quad (1.3)$$

La comparaison avec les résultats de Landau (1.1) démontre d'une façon irréfutable la validité du modèle phénoménologique.

Nous concluons ce chapitre en remarquant que le spectre n'est défini que jusqu'à une valeur maximum $k_M \approx 2,7 \text{ \AA}^{-1}$. Expérimentalement, on observe alors que le pic se fond dans le continuum : ceci est dû à la possibilité de désintégration d'une excitation élémentaire de grande énergie en plusieurs excitations de même énergie et moment totaux, étudiée en détail par Pitaevskii (1).

II. — INTERPRÉTATION THÉORIQUE DU SPECTRE DE LANDAU

Nous allons maintenant discuter plus en détail l'interprétation de l'expérience de Henshaw et Woods et ses implications théoriques. La diffusion de neutrons

lents par He II que nous avons étudiée dans le chapitre précédent est justiciable de l'approximation de Born, à condition de remplacer l'interaction neutron-atome

de He par un pseudo-potentiel du type proposé par Fermi. La section efficace différentielle par unité d'angle solide et d'énergie du neutron diffusé s'écrit dans cette approximation :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \frac{k_f}{k_0} |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 \delta(E_b - E_a)$$

où $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ sont les états initiaux et finaux d'énergie E_a et E_b de l'ensemble (neutron libre, système) :

$$\begin{aligned} |\varphi_a\rangle &= e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} |\psi_{n_0}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle, \\ |\varphi_b\rangle &= e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} |\psi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle, \\ E_a &= \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} + E_{n_0}, \quad E_b = \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} + E_n. \end{aligned}$$

V est l'interaction binaire « effective » entre le neutron incident et les atomes He^4 :

$$V = \sum_{i=1}^N V(|\vec{r} - \vec{r}_i|).$$

En fait, on ne mesure que l'angle de diffusion et le transfert d'énergie $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m}$: on doit donc sommer sur tous les états initiaux et finaux compatibles avec ce transfert d'énergie. Les états initiaux doivent être pondérés de leur poids statistique à la température considérée :

$$p_{n_0} = \frac{\exp(-E_{n_0}/kT)}{\sum_{n_0} \exp(-E_{n_0}/kT)}.$$

La section efficace s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon} &= \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \frac{k_f}{k_0} \sum_{n_0} p_{n_0} \sum_n \left\{ \left| \int d\vec{r} \int d\vec{r}_n \psi_n^* e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{i=1}^N V(\vec{r} - \vec{r}_i) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \psi_{n_0} \right|^2 \times \delta\left(\omega + \frac{E_{n_0} - E_n}{\hbar}\right) \Big\}. \end{aligned}$$

Van Hove a montré qu'on pouvait séparer deux facteurs dans cette expression : le premier contient les informations concernant la diffusion particulière étudiée, le second ne dépend que de la *structure* du système diffuseur et constitue la caractéristique essentielle du phénomène. Plus précisément, on a :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon} = A(k) S(k, \omega) \quad (2.1)$$

où $\hbar\vec{k}$ est le transfert de moment associé au transfert d'énergie $\hbar\omega$, les facteurs A et S étant donnés par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \frac{k_f}{k_0} |V(k)|^2 \\ S(k, \omega) &= \sum_{n_0} p_{n_0} \sum_n \left\{ \left| \left[\sum_{i=1}^N e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right]_{n_0}^n \right|^2 \delta\left(\omega + \frac{E_{n_0} - E_n}{\hbar}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cette fonction S a été étudiée par Van Hove qui a mis en évidence les propriétés suivantes :

a) La transformée de Fourier de $S(k, \omega)$ est la fonction de corrélation généralisée :

$$G(r, t) = N^{-1} \left\langle \sum_{i,j=1}^N \int d\vec{r}' \delta(\vec{r} + \vec{r}_i(0) - \vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j(t)) \right\rangle$$

où :

$$\langle \dots \rangle = \sum_{n_0} p_{n_0} [\dots]_{n_0}^{n_0}$$

est la moyenne statistique et où l'on a posé :

$$r_j(t) = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) r_j \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right).$$

b) Pour $t=0$, $G(r, t)$ se réduit à la fonction de corrélation usuelle :

$$g(\vec{r}) = N^{-1} \left\langle \sum_{i,j} \delta(\vec{r} + \vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\rangle$$

de transformée de Fourier :

$$S(k) = N^{-1} \left\langle \sum_{i,j} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j} \right\rangle. \quad (2.3)$$

Les expressions (2.2) et (2.3) ont une écriture difficile à manipuler. Nous allons les rendre plus simples en introduisant des notations appropriées. La densité du système en équilibre thermodynamique est :

$$\rho(\vec{r}) = \left\langle \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right\rangle = \rho_0,$$

sa transformée de Fourier, ou fluctuation de densité :

$$\rho_k = \left\langle \sum_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right\rangle = N \delta_{k,0}.$$

Par extension, on appellera $\rho(\vec{r})$ l'opérateur $\sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

et de même ρ_k l'opérateur $\sum_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i}$ (On vérifie

$\rho_k^* = \rho_{-k}$). On peut alors récrire (2.2) et (2.3) sous la forme :

$$S(k, \omega) = \sum_{n_0} p_{n_0} \sum_n \left\{ |(\rho_k^*)_{n_0}^n|^2 \delta\left(\omega + \frac{E_{n_0} - E_n}{\hbar}\right) \right\}, \quad (2.4)$$

$$NS(k) = \sum_{n_0} p_{n_0} \sum_n |(\rho_k^*)_{n_0}^n|^2. \quad (2.5)$$

On vérifie la relation :

$$NS(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(k, \omega) d\omega. \quad (2.6)$$

A température nulle, le système est dans son état fondamental et :

$$S(k, \omega) = \sum_n |(\rho_k)_0^n|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}), \quad (2.7)$$

$$NS(k) = \sum_n |(\rho_k)_0^n|^2, \quad (2.8)$$

où l'énergie d'excitation $\hbar\omega_{n0} = E_n - E_0$ est toujours positive.

D'après la relation (2.1), la fonction de corrélation « dynamique » $S(k, \omega)$ est directement accessible par l'expérience. Utilisant (2.6), on peut en déduire $S(k)$. En fait $S(k)$ peut se mesurer directement en étudiant la section efficace totale de diffusion dans une direction donnée (indépendamment du transfert d'énergie), pour des neutrons suffisamment rapides. En effet, si k_0 est assez grand, le transfert de moment k doit rester presque perpendiculaire à k_0 pour maintenir le transfert d'énergie dans des limites raisonnables. L'angle de déflexion du neutron ne dépend alors que de k , ce qui permet la mesure directe de $S(k)$. De ce fait, la fonction de corrélation statique $S(k)$ a été mesurée bien avant $S(k, \omega)$, par Henshaw. Utilisant des neutrons $\lambda_i = 1,06 \text{ \AA}$ correspondant à l'énergie 800° K, très supérieure à la largeur caractéristique du spectre observé par Henshaw et Woods, il a obtenu le résultat reproduit ci-dessous :

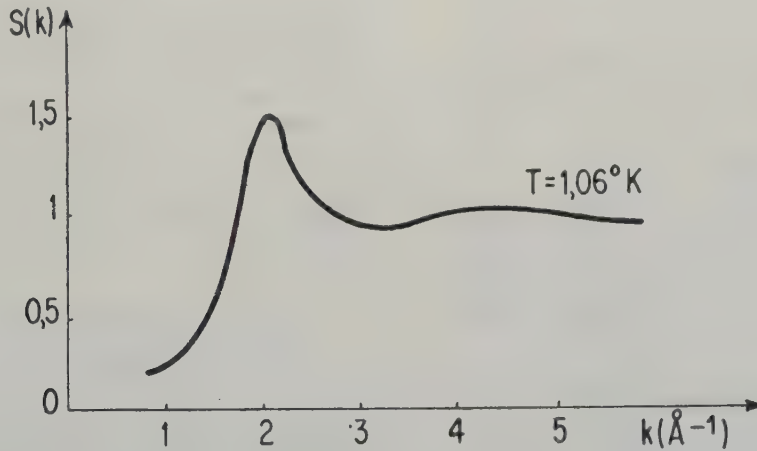


FIG. 5.

La fonction $S(k)$ est d'une importance fondamentale dans le modèle proposé par Feynman pour rendre compte du spectre d'excitations élémentaires à température nulle. Nous retraçons brièvement cette théorie,

fondée sur les premiers principes de mécanique quantique. Choissant une fonction d'onde d'essai pour représenter les états à une excitation élémentaire, il effectue un calcul variationnel pour minimiser leur énergie. Après une étude qualitative très profonde, il propose de représenter l'état à une quasi-particule de moment $\hbar\vec{k}$ par la fonction d'onde symétrisée :

$$\psi_k = \sum_{i=1}^N f_k(\vec{r}_i) \Phi$$

où Φ est la fonction d'onde de l'état fondamental. Le calcul variationnel a une solution $f_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ correspondant à l'énergie :

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(k)} \quad (2.9)$$

(Rappelons que le moment $\hbar\vec{k}$ de l'excitation est une constante du mouvement, car dans un système invariant par translation l'opérateur moment commute avec le hamiltonien).

Utilisant la détermination expérimentale de $S(k)$, Feynman calcule le spectre (2.9). Il reproduit correctement le spectre de phonons, mais obtient un accord seulement qualitatif dans la région des rotons. Nous avons porté son résultat, noté F, sur la courbe expérimentale du chapitre I^{er}.

En étudiant de façon plus approfondie la fonction d'onde précédente, Feynman s'est aperçu que, quoique mathématiquement inattaquable, elle était physique-

ment inadéquate. Si on forme un paquet d'ondes pour localiser l'excitation $\hbar\vec{k}$, on s'aperçoit que le courant est distribué régulièrement dans cette région, alors que la densité reste sensiblement invariante. Cette descrip-

tion ne peut évidemment représenter un état stationnaire pour lequel on doit vérifier $\text{div } \vec{j} = 0$.

Feynman est alors conduit à introduire la notion essentielle de *backflow* : la description correcte d'un état à une excitation élémentaire $\hbar\vec{k}$ implique l'existence d'un rétro-courant directement opposé à $\vec{k}$, distribué de manière à assurer la conservation de la masse.

Feynman et Cohen ont donc introduit une fonction d'onde d'essai modifiée :

$$\psi_k = \sum_i \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_i) \exp \left[i \sum_{j \neq i} g(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \Phi.$$

Ils ont montré que cette fonction d'onde d'une part assurait la présence du backflow et d'autre part conduisait à une énergie inférieure au premier résultat : la conservation du courant permet d'abaisser l'énergie variationnelle, ce qui est physiquement très satisfaisant.

Leur détermination du spectre est en accord quantitatif avec le spectre de Landau : nous l'avons représentée avec la courbe expérimentale du chapitre I^{er} et notée F. C. Nous pouvons faire une constatation immédiate et très importante : il n'y a pas de backflow associé avec les phonons. En effet, les deux courbes F et F. C. coïncident dans cette région.

Nous allons maintenant essayer de dégager l'influence du backflow sur la structure de la fonction $S(k, \omega)$. Tout d'abord, les états excités décrits par la première fonction d'onde d'essai de Feynman peuvent s'écrire :

$$|\psi_k\rangle = \rho_k^* |\psi_0\rangle,$$

l'opérateur ρ_k^* couple l'état fondamental à un seul état excité du système. Reportant ce résultat dans (2.7) et tenant compte de la normalisation, nous obtenons :

$$S^F(k, \omega) = NS(k)\delta(\omega - \omega_k). \quad (2.10)$$

La section efficace différentielle se réduit à un pic : expérimentalement nous avons vu que ceci n'était vérifié que dans la région des phonons, mais que dans la région des rotons $S(k, \omega)$ avait aussi un fond continu. Nous écrirons alors, suivant Miller, Nozières, Pines (M. N. P.) :

$$S(k, \omega) = NZ(k)\delta(\omega - \omega_k) + S^{\text{inc}}(k, \omega). \quad (2.11)$$

De la discussion précédente, il ressort que $S^{\text{inc}}(k, \omega)$ provient de ce que ρ_k^* peut aussi coupler $|\psi_0\rangle$ à des configurations à plusieurs excitations de moment total $\hbar\vec{k}$. L'énergie de ces configurations varie continûment en fonction de l'énergie de chaque composante.

L'existence du terme continu $S^{\text{inc}}(k, \omega)$ montre que

les quasi-particules de Feynman, d'opérateur création ρ_k^* , ne constituent qu'une première approximation. En réalité, ces quasi-particules interagissent entre elles, et l'on peut représenter une excitation élémentaire exacte comme une quasi-particule de Feynman habillée d'un nuage d'excitations virtuelles. Ce nuage se déplace par rapport à la quasi-particule centrale : c'est précisément ce mouvement d'ensemble qui constitue le backflow. On voit ainsi apparaître clairement la relation étroite qui existe entre le backflow de Feynman et la partie incohérente de la fonction $S(k, \omega)$. Cette relation persiste dans la limite où $k \rightarrow 0$: en effet, M. N. P. ont montré que le terme $S^{\text{inc}}(k, \omega)$ devenait alors négligeable, ce qui confirme l'absence de backflow autour des phonons constatée par Feynman.

La relation entre ces différentes présentations du problème devient très claire lorsqu'on introduit un certain nombre de « règles de somme » satisfaites par la fonction $S(k, \omega)$ à température nulle :

$$\int_0^\infty S(k, \omega) d\omega = NS(k) \quad (2.12)$$

$$\int_0^\infty S(k, \omega) \omega d\omega = \frac{N\hbar k^2}{2m}, \quad (2.13)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty S(k, \omega) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\hbar N}{2mc^2}, \quad (2.14)$$

où c est la vitesse du son macroscopique, déduite de la compressibilité, que nous étudierons plus en détail au chapitre IV. La relation (2.12) découle des définitions (2.7) et (2.8). La relation (2.13), dite « règle de somme f », s'établit en calculant explicitement la valeur moyenne $\langle 0 | [[H, \rho_k], \rho_k^*] | 0 \rangle$. Finalement, la relation (2.14) se démontre (cf. Nozières, *op. cit.*), en étudiant la réponse du système à un faible gradient de pression.

Lorsque $k \rightarrow 0$, la partie incohérente de la fonction de corrélation est négligeable, S prend la forme de Feynman (2.10), où $\hbar\omega_k$ est l'énergie de la quasi-particule de moment k . En reportant cette expression dans les règles de somme (2.13) et (2.14), on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \omega_k = \frac{\hbar k^2}{2mS(k)}; \quad (2.15)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \omega_k^2 = c^2 k^2. \quad (2.16)$$

Nous retrouvons donc aux faibles valeurs de k le spectre (2.9) proposé par Feynman en l'absence de backflow. D'autre part, (2.16) établit l'identité entre

la vitesse des phonons $\frac{\omega_k}{k}$, et la vitesse c du son habituel.

Lorsque k augmente, ces relations ne demeurent plus valables, du fait de l'apparition du terme $S^{\text{inc}}(k, \omega)$.

III. — FORMALISME MATHÉMATIQUE

1. — Calcul de Bogoliubov

Bogoliubov a, le premier, en 1946, obtenu, par un calcul microscopique approché, la principale caractéristique de la superfluidité, à savoir que le spectre des excitations élémentaires de grande longueur d'onde est un spectre de phonons. La méthode qu'il a employée étant à la base de celle que nous utiliserons, nous en donnons un bref aperçu.

Nous travaillerons désormais avec le formalisme dit de seconde quantification. Nous introduisons les opérateurs destruction et création d'une particule au point $\vec{r}$: $\psi(\vec{r})$ et $\psi^*(\vec{r})$. Nous utiliserons le développement de ces opérateurs sur les fonctions propres de l'hamiltonien libre à une particule $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \\ \psi^*(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}.\end{aligned}$$

(Note : Dans la suite, nous omettrons les flèches des vecteurs indices des opérateurs a).

Dans ce formalisme, le hamiltonien :

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

s'écrit :

$$\begin{aligned}H &= \int d\vec{r} \psi^*(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(\vec{r}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \psi^*(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}) V(\vec{r} - \vec{r}') \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}'),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} V(\vec{k}) a_{\vec{p}+\vec{k}}^* a_{\vec{q}-\vec{k}}^* a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}, \\ V(\vec{k}) &= \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r}.\end{aligned}$$

Dans le cas des bosons, les opérateurs satisfont les règles de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}[\psi(\vec{r}), \psi(\vec{r}')] &= [\psi^*(\vec{r}), \psi^*(\vec{r}')] = 0, \quad [\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= [a_{\vec{k}}^*, a_{\vec{k}'}^*] = 0, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^*] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}.\end{aligned}$$

On peut alors récrire le hamiltonien d'interaction sous la forme :

$$\frac{1}{4\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} [V(\vec{k}) + V(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q})] a_{\vec{p}+\vec{k}}^* a_{\vec{q}-\vec{k}}^* a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}.$$

Suivant Bogoliubov, nous étudions l'état fondamental du système en nous plaçant dans un référentiel où le système est au repos. S'il n'y avait pas d'interaction entre les atomes, ceux-ci s'empileraient dans l'état d'énergie nulle : c'est le phénomène de condensation du gaz de Bose-Einstein. Si $N_{\vec{k}}$ est le nombre d'occupation de l'état à une particule de moment $\vec{k}$, on aurait :

$$\begin{aligned}N_{\vec{k}} &= 0 \quad \text{si} \quad \vec{k} \neq 0, \\ N_0 &= N.\end{aligned}$$

Si maintenant nous nous intéressons à l'état de base réel et aux premiers états excités du système des atomes en interaction, le condensat subsiste, mais on trouve quelques particules dans des états excités. Comme N_0 reste macroscopique, $[a_0, a_0^*] = 1$ est très petit comparé à a_0 et a_0^* que nous traitons désormais comme des nombres : $a_0 = a_0^* = N_0^{1/2}$. On peut alors développer le hamiltonien en puissances de N_0 en éliminant la phase condensée :

$$H = H_0 + V_a + V_b + V_c + V_d + V_e + V_f + V_g. \quad (3.1)$$

$$V_a = \frac{1}{4\Omega} \sum'_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} [V(\vec{k}) + V(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q})] a_{\vec{p}+\vec{k}}^* a_{\vec{q}-\vec{k}}^* a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}.$$

L'indice prime sur la sommation indique qu'aucun des opérateurs a ou a^* ne peut être a_0 ou a_0^* .

$$V_b = \frac{N_0^{1/2}}{2\Omega} \sum'_{\vec{k}, \vec{q}} [V(\vec{k}) + V(\vec{q} - \vec{k})] a_{\vec{k}}^* a_{\vec{q}-\vec{k}}^* a_{\vec{q}};$$

$$V_c = \frac{N_0^{1/2}}{2\Omega} \sum'_{\vec{k}, \vec{p}} [V(\vec{k}) + V(\vec{p})] a_{\vec{p}+\vec{k}}^* a_{\vec{k}} a_{\vec{p}};$$

$$V_d = \frac{N_0}{2\Omega} \sum'_{\vec{k}} V(\vec{k}) a_{\vec{k}}^* a_{-\vec{k}};$$

$$V_e = \frac{N_0}{2\Omega} \sum'_{\vec{k}} V(\vec{k}) a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}};$$

$$V_f = \frac{N_0}{\Omega} \sum'_{\vec{k}} [V(\vec{k}) + V(0)] a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}};$$

$$V_g = \frac{N_0^2}{2\Omega} V(0).$$

L'approximation de Bogoliubov consiste à négliger les termes d'ordre supérieur en $(N - N_0)$ et donc à ne

conserver que les termes en N_0^2 et N_0 dans l'interaction. Les opérateurs a_k ($k \neq 0$) sont considérés comme des « termes correctifs du premier ordre ». Cela revient à négliger les termes V_a , V_b et V_c du développement de V . Nous verrons que cette approximation peut s'obtenir dans le cadre d'un développement en perturbations limité au premier ordre, adapté au traitement d'un gaz dilué. Le hamiltonien s'écrit alors :

$$H_B = \sum_k' \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^* a_k + \frac{1}{2} \frac{N_0^2}{\Omega} V(0) + \frac{N_0}{\Omega} V(0) \sum_k' a_k^* a_k + \frac{N_0}{\Omega} \sum_k' V(k) a_k^* a_k + \frac{N_0}{2\Omega} \sum_k' V(k) (a_k^* a_{-k}^* + a_k a_{-k}). \quad (3.2)$$

Remarquons que $\sum_k' a_k^* a_k = N - N_0$ est une quantité du premier ordre en perturbation ; on a :

$$N^2 = [N_0 + (N - N_0)]^2 \approx N_0^2 + 2N_0(N - N_0).$$

Les deuxième et troisième termes du développement de H se combinent pour donner la contribution :

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{\Omega} V(0).$$

Bogoliubov a montré qu'on pouvait diagonaliser ce hamiltonien modèle par une transformation canonique :

$$a_k = u_k b_k - v_k b_{-k}^*$$

où les u_k et v_k sont des quantités réelles ne dépendant que du module de $\vec{k}$ et telles que $u_k^2 - v_k^2 = 1$. Il est facile de vérifier que les b_k satisfont les règles de commutation des opérateurs de bosons. Le hamiltonien (3.2) devient ainsi :

$$\begin{aligned} H_B &= U + H_{11} + H_{20}; \\ U &= \frac{1}{2} N^2 V(0) \\ &+ \sum_k' \{ [\varepsilon_k^0 + N_0 V(k)] v_k^2 - N_0 V(k) u_k v_k \}; \\ H_{11} &= \sum_k' \varepsilon_k b_k^* b_k; \\ H_{20} &= \sum_k' \left\{ \frac{N_0 V(k)}{2} (u_k^2 + v_k^2) - [\varepsilon_k^0 + N_0 V(k)] u_k v_k \right\} \\ &\quad \times (b_k^* b_{-k}^* + b_k b_{-k}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\varepsilon_k^0 = \hbar^2 k^2 / 2m$ et ε_k est une fonction des u_k , v_k . Si nous choisissons ces paramètres de telle manière que $H_{20} \equiv 0$, la diagonalisation de H_B est effectuée. ε_k et U sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= [2N_0 V(k) \varepsilon_k^0 + (\varepsilon_k^0)^2]^{1/2}; \\ U &= \frac{1}{2} N^2 V(0) + \frac{1}{2} \sum_k' [\varepsilon_k - \varepsilon_k^0 - N_0 V(k)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Interprétation physique des résultats de Bogoliubov. — Les états excités du système précédent sont caractérisés par une certaine distribution d'excitations élémentaires d'opérateur création b_k^* et d'énergie ε_k . U est l'énergie de l'état fondamental $|\psi_0^B\rangle$ qui ne contient aucune excitation élémentaire :

$$b_k |\psi_0^B\rangle = 0.$$

Le nombre de particules nues de moment $\vec{k} \neq 0$ dans l'état fondamental est :

$$N_k = \langle \psi_0^B | a_k^* a_k | \psi_0^B \rangle = v_k^2 = \frac{\varepsilon_k^0 + N_0 V(k) - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k}. \quad (3.5)$$

Comme la transformation canonique le suggère, v_k mesure l'effet de l'interaction entre les particules du système.

Le spectre ε_k impose la condition $V(0) > 0$. Comme $V(0) = \int V(r) d\vec{r}$, cela suppose une interaction entre les particules qui dans l'ensemble soit répulsive. A la limite des petits k , ε_k est de la forme $\varepsilon_k = sk$ où :

$$s = [2N_0 V(0)]^{1/2};$$

les excitations élémentaires de grande longueur d'onde du système sont des phonons, conformément à la théorie de Landau. Notons que l'absence d'interaction entre les excitations élémentaires de Bogoliubov est évidemment une conséquence directe de l'abandon des termes V_a , V_b et V_c .

En conclusion, l'approximation de Bogoliubov permet d'obtenir les principaux résultats qualitatifs du comportement de ^4He superfluide. Pour obtenir des résultats quantitatifs, il faut pouvoir tenir compte des termes négligés par Bogoliubov. Un formalisme permettant d'atteindre ce but a été établi par Hugenholtz et Pines : nous allons le décrire brièvement.

2. — Formalisme général

Hugenholtz et Pines remarquent tout d'abord que la première prescription de Bogoliubov est indispensable pour mener à bien un calcul de perturbations qui s'avère en effet impossible si a_0 et a_0^* continuent à agir comme des opérateurs. Il faut donc remplacer l'hamiltonien réel par (3.1) : $H = H_0 + V(N_0)$. Cet hamiltonien ne conservant pas le nombre de particules, il faut lui adjoindre la condition subsidiaire :

$$\langle N' \rangle = \left\langle \sum_k' a_k^* a_k \right\rangle = N - N_0$$

où N est le nombre total de particules du système. Soit $E_0(N_0)$ l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (3.1) satisfaisant la condition précédente. On peut considérer la population N_0 de l'état condensé comme

un paramètre, que l'on fixe en minimisant l'énergie. N_0 sera ainsi déterminé par la condition :

$$\frac{dE_0}{dN_0} = 0 \text{ à } N \text{ fixé.}$$

N' ne commute pas avec H , mais $[N', H] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right)$. A la limite $\Omega \rightarrow \infty$, où nous nous placerons désormais, N' sera un bon nombre quantique. On peut alors utiliser la technique du multiplicateur de Lagrange et rechercher l'état de base de :

$$H' = H(N_0) - \mu N' \quad (3.6)$$

sans condition subsidiaire.

L'état fondamental du système $|\psi_0(N_0, \mu)\rangle$ et les valeurs moyennes $E'_0(N_0, \mu)$, $E_0(N_0, \mu)$ et $N'(N_0, \mu)$ des opérateurs H' , H et N' respectivement dépendent maintenant du paramètre μ qui est déterminé par la condition :

$$N'(N_0, \mu) = N - N_0. \quad (3.7)$$

Pour N fixé, cette relation exprime μ en fonction de N_0 . Ceci fait, il reste à déterminer N_0 par la condition, toujours à N fixé :

$$\frac{dE_0}{dN_0} = 0.$$

Nous allons récrire cette condition sous une forme plus adaptée au calcul. Auparavant, notons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_0}{\partial \mu} &= \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \left| H' \right| \psi_0 \right\rangle + \left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial H'}{\partial \mu} \right| \psi_0 \right\rangle + \left\langle \psi_0 \left| H' \right| \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \right\rangle \\ &= E'_0 \frac{\partial}{\partial \mu} \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | N' | \psi_0 \rangle. \end{aligned}$$

L'état $|\psi_0\rangle$ étant normalisé, on déduit la relation :

$$\frac{\partial E'_0}{\partial \mu} = -N'. \quad (3.8)$$

L'énergie E_0 est donnée par :

$$E_0(N_0, \mu) = E'_0(N_0, \mu) + \mu N'(N_0, \mu),$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial N_0} &= \frac{\partial E'_0}{\partial N_0} + \mu \frac{\partial N'}{\partial N_0}, \\ \frac{\partial E_0}{\partial \mu} &= \frac{\partial E'_0}{\partial \mu} + N' + \mu \frac{\partial N'}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial N'}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Il vient par conséquent :

$$dE_0 = \left(\frac{\partial E'_0}{\partial N_0} + \mu \frac{\partial N'}{\partial N_0} \right) dN_0 + \mu \frac{\partial N'}{\partial \mu} d\mu.$$

Les variations dN_0 et $d\mu$ ne sont pas indépendantes, car elles doivent préserver la relation (3.7) qui peut s'écrire :

$$dN = \left(1 + \frac{\partial N'}{\partial N_0} \right) dN_0 + \frac{\partial N'}{\partial \mu} d\mu.$$

En éliminant $d\mu$, on peut mettre dE_0 sous la forme :

$$dE_0 = \left(\frac{\partial E'_0}{\partial N_0} - \mu \right) dN_0 + \mu dN.$$

La condition fixant N_0 impose donc :

$$\mu = \frac{\partial E'_0}{\partial N_0} \quad (3.9)$$

et :

$$\mu = \frac{dE_0}{dN}. \quad (3.10)$$

Les techniques de la théorie des champs nous permettront de représenter facilement l'énergie E'_0 en contributions de diagrammes. Nous aurons donc grand besoin des deux relations (3.8) et (3.9).

Le problème soulevé par l'occupation macroscopique de l'état à une particule de moment nul est donc réglé si nous travaillons avec le hamiltonien :

$$H' = H'_0 + V(N_0) \quad \text{où} \quad H'_0 = \sum_k' (\epsilon_k^0 - \mu) a_k^\dagger a_k. \quad (3.11)$$

Le développement de perturbations se heurte cependant à une nouvelle difficulté. Essayons par exemple de calculer l'énergie de l'état de base en utilisant la formule de Goldstone :

$$E'_0 = \langle 0 | \left[V - V \frac{1}{H'_0} V + V \frac{1}{H'_0} V \frac{1}{H'_0} V - \dots \right]_c | 0 \rangle$$

où $|0\rangle$ est l'état de base du système non perturbé, soit le vide de particules dans notre formalisme, et où l'indice c indique que nous devons sommer les contributions des seuls diagrammes vide-vide connexes. On trouve toute une classe de diagrammes hautement divergents du type :

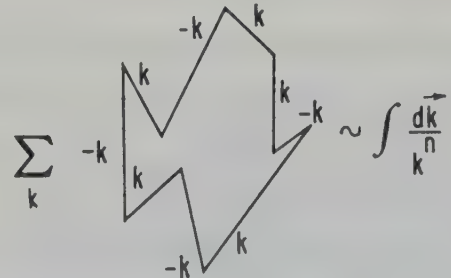


FIG. 6.

Ces divergences, non physiques, sont essentiellement dues à la décomposition $H = H_0 + H_1$. Si nous savions traiter d'emblée les particules réelles, ou quasi-particules, qui composent le système réel, nous ne trouverions pas ce genre de difficulté.

Il existe une méthode permettant de travailler avec ces quasi-particules directement : la méthode des fonctions de Green. Si nous l'utilisons dans le cadre d'un développement de perturbation, les divergences précédentes s'éliminent grâce à des sommations partielles des diagrammes divergents : c'est ce qu'a montré Beliaev. Notre objectif sera plus ambitieux : nous allons calculer directement les caractéristiques physiques du système réel et en particulier le spectre des quasi-particules dans la limite des grandes longueurs d'onde en utilisant la décomposition $H_0 + H_1$ comme un intermédiaire de calcul. En d'autres termes, nous nous proposons, dans les limites indiquées, de sommer tout le développement de perturbations.

La méthode générale des fonctions de Green appliquée au problème à N corps a été développée par Galitskii et Migdal, et nous nous bornons ici à en donner les principaux résultats. Nous définissons la fonction de Green à une particule :

$$iG(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \langle \psi_0 | T \{ \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}', t') \} | \psi_0 \rangle \quad (3.12)$$

où T est l'opérateur chronologique qui ordonne les temps croissant de droite à gauche :

$$iG(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \begin{cases} \langle \psi_0 | \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}', t') | \psi_0 \rangle & \text{si } t > t' \\ \langle \psi_0 | \psi^*(\vec{r}', t') \psi(\vec{r}, t) | \psi_0 \rangle & \text{si } t < t'. \end{cases}$$

Les opérateurs sont exprimés en représentation de Heisenberg. H' étant indépendant du temps, G est de la forme :

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = G(\vec{r}, \vec{r}', t - t').$$

Introduisons la transformée de Fourier :

$$iG(\vec{k}, \vec{k}', t - t') = \frac{1}{\Omega} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' iG(\vec{r}, \vec{r}', t - t') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} \\ = \langle \psi_0 | T \{ a_{\vec{k}}(t) a_{\vec{k}'}^*(t') \} | \psi_0 \rangle.$$

Pour un système uniforme, G n'est différent de zéro que si $\vec{k} = \vec{k}'$; nous poserons donc :

$$iG(\vec{k}, t - t') = \langle \psi_0 | T \{ a_{\vec{k}}(t) a_{\vec{k}}^*(t') \} | \psi_0 \rangle. \quad (3.13)$$

On voit tout de suite que le nombre d'occupation de l'état de moment $\vec{k}$ est donné par :

$$N_k = \langle \psi_0 | a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle = iG(\vec{k}, t = -0).$$

De même, E_0 s'exprime simplement à partir de la fonction de Green à une particule.

Le spectre des quasi-particules est déterminé par

les pôles de la fonction $G(\vec{k}, \omega)$, transformée de Fourier de $G(\vec{k}, t)$, définie par :

$$G(\vec{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Nous voyons que les principales caractéristiques physiques du système sont accessibles dès que G est connue. Notre problème immédiat consiste donc à calculer G : nous allons utiliser dans ce but les méthodes de la théorie des champs.

3. — Application des méthodes de la théorie des champs

Nous commençons par exprimer les opérateurs en représentation d'interaction :

$$iG(\vec{k}, t - t') = \langle \psi_0 | T \{ U(0, t) a_{\vec{k}}(t) U(t, t') a_{\vec{k}}^*(t') U(t', 0) \} | \psi_0 \rangle \quad (3.14)$$

où U est l'opérateur d'évolution du système :

$$U(t, t') = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^{t_1} dt_p T \{ H_1(t_1) \dots H_1(t_p) \} \quad (3.15)$$

et $a_{\vec{k}}(t) = e^{iH_0 t} a_{\vec{k}} e^{-iH_0 t}$ (Nous nous plaçons dans un système d'unités où $\hbar = 1$).

Le système étant conservatif, nous avons :

$$U(t, t') = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'}. \quad (3.16)$$

Si on introduit adiabatiquement la perturbation, on peut montrer qu'à un facteur de phase près, $U(0, -\infty) | 0 \rangle$ est l'état fondamental réel $|\psi_0\rangle$. De même, $\langle 0 | U(+\infty, 0)$ représente $\langle \psi_0 |$. On élimine les facteurs de phase en divisant par :

$$\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle = \langle 0 | S | 0 \rangle.$$

On obtient ainsi l'expression classique :

$$iG(\vec{k}, t - t') = \frac{\langle 0 | T \{ a_{\vec{k}}(t) a_{\vec{k}}^*(t') S \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (3.17)$$

Au numérateur, le T produit dispose les opérateurs $a_{\vec{k}}(t)$ et $a_{\vec{k}}^*(t')$ à leur place chronologique dans le développement de S . Le dénominateur de G assure l'élimination des diagrammes non connexes du développement diagrammatique que nous allons définir.

Le théorème de Wick nous permet de décomposer le T produit de (3.17). Comme nous nous intéressons à une valeur moyenne dans le vide, le seul terme non nul sera le produit de toutes les contractions possibles de deux opérateurs, du type :

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{a_{k_1}(t_1)} \overrightarrow{a_{k_2}^*(t_2)} &= \langle 0 | T \{ a_{k_1}(t_1) a_{k_2}^*(t_2) \} | 0 \rangle \\
 &= iG_0(k_1, t_1 - t_2) \delta_{k_1, k_2}; \\
 iG_0(k_1, t_1 - t_2) &= \begin{cases} e^{-i(\varepsilon_k^0 - \mu)(t_1 - t_2)} & \text{si } t_1 > t_2, \\ 0 & \text{si } t_1 < t_2 \end{cases} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Une contraction est représentée par une ligne joignant les deux opérateurs contractés dirigée vers les temps croissants. Contrairement au cas des fermions, il n'y a pas de propagation remontant le temps correspondant à la propagation des trous. Les vertex correspondant aux différents termes de l'interaction sont représentés par les symboles ci-dessous :

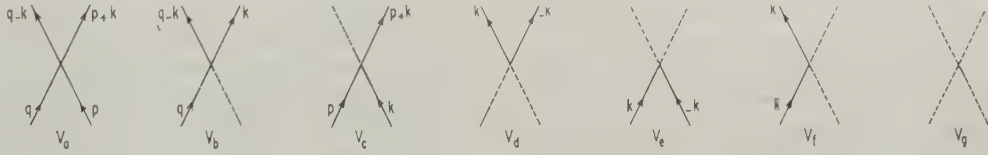


FIG. 7.

Remarquons l'existence de vertex incomplets que nous complétons par des lignes pointillées, que nous appelons « lignes de vide ». A chaque ligne de vide est associé un facteur $N_0^{1/2}$, provenant d'un opérateur a_0 ou a_0^* . L'expression (3.17) nous indique que seuls contribueront à $G(k, t - t')$ les diagrammes connexes attachés par un propagateur de moment $\vec{k}$ quittant le point marqué t' et arrivant au point marqué t après avoir interagi avec les autres particules du système par l'intermédiaire des différents vertex V .

Nous travaillerons avec des diagrammes muets où une interaction du type V_a par exemple sera représentée par :

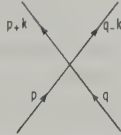


FIG. 8.

Ce choix nous impose de multiplier la contribution de V_a par un facteur 4, correspondant aux possibilités d'échanger les opérateurs a_p et a_q dans leurs contractions avec les autres opérateurs a^* (et de même pour a_{p+k}^* et a_{q-k}^*). Plus généralement, tout vertex contenant une paire d'opérateurs a ou a^* devra être affecté d'un facteur 2. En contrepartie, s'il existe dans un diagramme une paire de lignes équivalentes, c'est-à-dire deux lignes joignant les mêmes vertex, nous devrons multiplier la contribution du diagramme par

le facteur $\frac{1}{2}$. On peut donc énoncer la règle suivante de calcul des diagrammes de G :

1) A chaque ligne joignant deux vertex $H_1(t_1)$ et $H_1(t_2)$ ($t_2 > t_1$) associer la contribution :

$$iG_0(k_1, t_2 - t_1);$$

2) A chaque vertex, associer les contributions respectives :

$$\begin{aligned}
 V_a &= V(k) + V(p + k - q), \\
 V_b &= V(k) + V(k - q), \\
 V_c &= V(k) + V(p), \\
 V_d &= V_e = V(k), \\
 V_f &= V(k) + V(0);
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

3) Associer le facteur $(n_0)^{s/2}$ où $n_0 = N_0/\Omega$ et s est le nombre de lignes manquantes ;

4) Intégrer sur tous les moments et les temps intermédiaires ;

5) Multiplier par $(-i)^{p/2mr}$ où p est l'ordre du diagramme, c'est-à-dire le nombre de facteurs V , r est le nombre de façons dont on peut permuter les vertex sans changer le diagramme, et m le nombre de paires de lignes équivalentes.

Si nous introduisons les transformées de Fourier :

$$G_0(k_i, \omega_i) = (\omega_i - \varepsilon_{k_i}^0 + \mu + i\delta)^{-1},$$

l'intégration sur les temps intermédiaires assurera la conservation de l'énergie à chaque vertex. On obtiendra alors, pour un diagramme quelconque, une contribution de la forme :

$$G(k, t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k, \omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

où $G(k, \omega)$ est obtenu en remplaçant dans les règles précédentes les temps intermédiaires par les énergies intermédiaires.

Définissons les noyaux de self-énergie d'une particule :

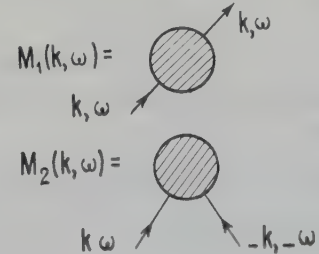


FIG. 9.

Par définition, les noyaux ne peuvent se décomposer suivant



FIG. 10.

Ils somment les contributions irréductibles par rapport à cette décomposition.

L'existence de $M_2(k, \omega)$ est liée à la non-conservation du nombre de particules aux vertex du type (b), (c), (d) et (e). Ceci nous conduit à introduire aussi les fonctions :

$$\begin{aligned} i\widehat{G}(k, t - t') &= \langle \psi_0 | T \{ a_k(t) a_{-k}(t') \} | \psi_0 \rangle \\ i\widetilde{G}(k, t - t') &= \langle \psi_0 | T \{ a_k^*(t) a_{-k}^*(t') \} | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$G(k, \omega)$ et $\widehat{G}(k, \omega)$ peuvent s'exprimer à partir de M_1 et M_2 par les équations :

$$\begin{aligned} G(k, \omega) &= G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) M_1(k, \omega) G(k, \omega) \\ &\quad + G_0(k, \omega) M_2(k, \omega) \widehat{G}(k, \omega); \\ \widehat{G}(k, \omega) &= \widetilde{G}(k, \omega) = G_0(-k, -\omega) M_1(-k, -\omega) \widehat{G}(k, \omega) \\ &\quad + G_0(-k, -\omega) M_2(k, \omega) G(k, \omega). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les équations (3.21) ne font que traduire la décomposition diagrammatique ci-dessous :

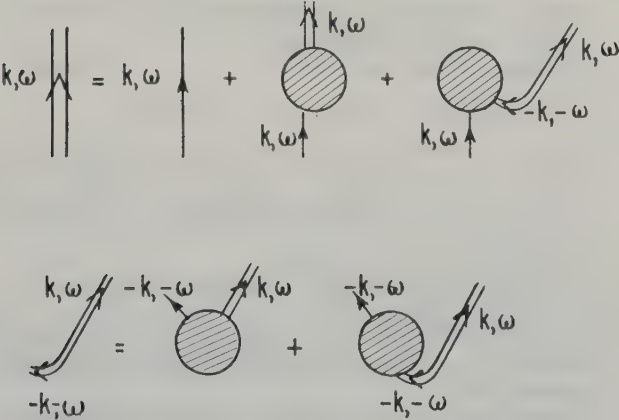


FIG. 11.

La résolution des équations (3.21) est facile ; on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} G(k, \omega) &= \frac{\omega + \varepsilon_k^0 - \mu + M_1(-k, -\omega)}{D} \\ \widehat{G}(k, \omega) &= - \frac{M_2(k, \omega)}{D} \end{aligned} \quad (3.22)$$

où :

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \omega - \frac{i}{2} [M_1(k, \omega) - M_1(-k, -\omega)] \right\}^2 \\ &\quad - \left\{ \varepsilon_k^0 - \mu + \frac{i}{2} [M_1(k, \omega) + M_1(-k, -\omega)] \right\}^2 + M_2^2(k, \omega) + i\delta. \end{aligned}$$

Remarque. — Si $M'(k, \omega)$ est la contribution exacte des noyaux de self-énergie, l'équation de Dyson s'écrit :

$$iG = iG_0 + iG_0 M' iG.$$

Nous avons choisi en réalité $M(k, \omega) = iM'(k, \omega)$, ce qui nous a permis d'éliminer les facteurs i des équations (3.21).

La décomposition (3.22) des fonctions de Green est due à Beliaev. Elle réduit le calcul de G et $\widehat{G}$ à celui de M_1 et M_2 . Ces quantités sont exemptes des divergences mentionnées dans la section 2, ce qui élimine les difficultés rencontrées par un développement de perturbations complet : les termes divergents ont été formellement « resommés ».

Nous concluons cette présentation du formalisme des perturbations en donnant les règles de calcul de E'_0 . Comme nous l'avons indiqué, E'_0 peut se calculer directement à partir de G par intégration. Mais E'_0 peut aussi se représenter par des diagrammes. On peut montrer (voir par exemple Nozières, *op. cit.*) que pour les grands intervalles de temps la valeur moyenne dans le vide de l'opérateur d'évolution oscille comme :

$$e^{-iE'_0(t-t')}.$$

D'autre part, $\langle 0 | U | 0 \rangle$, représenté par les diagrammes vide-vide, peut s'exprimer à partir de la contribution des seuls diagrammes vide-vide connexes par la relation : $\langle 0 | U | 0 \rangle = \exp [\langle 0 | U | 0 \rangle_c]$. On en déduit aisément la règle de calcul de E'_0 .

Considérons les diagrammes vide-vide connexes. A la limite $t \rightarrow +\infty$, $t' \rightarrow -\infty$, l'intégration sur tous les temps intermédiaires assure la conservation de l'énergie à chaque vertex. La dernière intégration apportera le facteur :

$$\int_{t'}^t e^{i\tau(\omega_i - \omega_j)} d\tau = t - t'.$$

D'après ce qui précède, la contribution des diagrammes vide-vide connexes amputée de ce facteur donnera :

$$-iE'_0/\Omega.$$

Nous établirons plus loin des relations entre diagrammes, par exemple entre $M(0, 0)$ et E'_0/Ω . Ces relations sont établies en fait entre $M'(0, 0)$ et $-iE'_0/\Omega$, mais comme nous avons choisi $M = iM'$, nous pouvons comparer directement les diagrammes de self-énergie et les diagrammes vide-vide.

4. — Calcul de perturbation au premier ordre

La première application de la méthode que nous venons d'exposer consiste à calculer le spectre de quasi-particules au premier ordre d'un développement de perturbations. Considérons un gaz dilué de sphères dures. Le paramètre de développement est $(na^3)^{1/2}$ où n est la densité du gaz et a le diamètre des sphères dures. Il est bien connu que dans ces conditions, la diffusion multiple de deux particules joue un rôle essentiel (cf. Pines, *op. cit.*). Par contre, en raison de la faible densité du système, des processus faisant intervenir plus de deux particules sont d'ordre supérieur. La diffusion multiple de deux particules correspond à la renormalisation des vertex effectuée par Brueckner et revient à remplacer, pour les faibles transferts de moment, l'interaction de deux particules par l'amplitude de diffusion dans le problème à deux particules, évaluée à la limite de l'énergie nulle. Pour des sphères dures, cette amplitude vaut $(-a)$. L'interaction renormalisée est alors $f_0 = 4\pi a$.

L'approximation de plus bas ordre consiste à renormaliser les propagateurs au sens de Brueckner, c'est-à-dire à choisir pour M_1 l'interaction V_f renormalisée et pour M_2 l'interaction V_d renormalisée. Le potentiel chimique $\mu = dE_0/dN$ doit en principe être déterminé par la résolution de l'équation différentielle exprimant E_0 à partir de G . Néanmoins, Hugenholtz-Pines montrent que la relation $\mu = M_1(0, 0) - M_2(0, 0)$ est vérifiée à tous les ordres du développement de perturbations (Nous redémontrons ce théorème d'une extrême importance dans le chapitre IV). En utilisant ce résultat, nous pouvons écrire au premier ordre : $M_1 = 2n_0f_0$, $M_2 = n_0f_0$, $\mu = n_0f_0$ ($n_0 = N_0/\Omega$). Si nous reportons ces données dans (3.22), nous obtenons :

$$G^{(1)}(k, \omega) = \frac{u_k^2}{\omega - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{v_k^2}{\omega + \varepsilon_k - i\delta} \quad (3.23)$$

où u_k^2 et v_k^2 sont les paramètres de la transformation canonique de Bogoliubov pour les vertex renormalisés :

$$\begin{aligned} u_k^2 &= \frac{\varepsilon_k^0 + n_0f_0 + \varepsilon_k}{2\varepsilon_k} \\ v_k^2 &= \frac{\varepsilon_k^0 + n_0f_0 - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

et où :

$$\varepsilon_k^2 = (\varepsilon_k^0)^2 + 2n_0f_0\varepsilon_k^0 \quad (3.25)$$

(3.25) est identique au résultat (3.4) obtenu par la méthode directe de Bogoliubov. Celle-ci apparaît donc comme une méthode de perturbations valable au premier ordre pour un gaz dilué.

Hughenoltz et Pines ont aussi calculé à ce même ordre la fonction de corrélation $S(k, \omega)$. Ils trouvent :

$$S^{(1)}(k, \omega) = \frac{n_0k^2}{2m\varepsilon_k} \delta(\omega - \varepsilon_k). \quad (3.26)$$

Nous voyons qu'au premier ordre, le spectre des quasi-particules et le spectre des excitations élémentaires sont identiques. Nous remarquons en outre que (3.26) ne satisfait pas les règles de somme établies au chapitre II, à cause de la présence du facteur n_0 au lieu de n . Cette remarque est à la base d'autres méthodes de calcul (voir par exemple P. Hohenberg, *Thèse Harvard*, 1962), qui ne vérifient pas le théorème d'Hughenoltz-Pines, mais satisfont les règles de somme. Si l'on tenait compte de termes d'ordre supérieur, n_0 serait alors remplacé par n , et les règles de somme seraient vérifiées. En particulier, la fonction de corrélation $S(k)$ prend alors la forme prévue par Feynman :

$$S(k) = \frac{\hbar^2k^2}{2m\varepsilon_k}. \quad (3.27)$$

Beliaev a effectué le calcul du spectre des quasi-particules au second ordre. A la limite des grandes longueurs d'onde, il trouve la relation de dispersion :

$$\varepsilon_k = k\sqrt{n_0f_0} \left(1 + \frac{7}{6\pi^2} \sqrt{n_0f_0^3} \right) - i \frac{3}{640\pi} \sqrt{n_0f_0^3} \frac{k^5}{(n_0f_0)^{3/2}} \quad (k \ll \sqrt{n_0f_0}) \quad (3.28)$$

où le facteur de k est la vitesse du son macroscopique. On voit apparaître un terme d'amortissement d'ordre k^5 .

Le paramètre de développement s'avère être :

$$\frac{1}{\pi^2} (n_0f_0^3)^{1/2}.$$

Dans le cas de ^4He liquide, $n \approx 1/45 \text{ \AA}^3$, $a = 2,7 \text{ \AA}$, d'où $\frac{1}{\pi^2} (n_0f_0^3)^{1/2} \sim 3$. Il n'est donc pas évident que les calculs faits pour un gaz dilué soient caractéristiques du liquide. Dans les chapitres suivants, nous essaierons de résoudre cette difficulté en sommant tout le développement de perturbations : nous verrons que cela ne sera possible qu'à la limite des grandes longueurs d'onde.

IV. — ÉTUDE DE LA FONCTION DE GREEN A UNE PARTICULE

La théorie des fonctions de Green appliquée au problème à N corps nous enseigne que le spectre des quasi-particules est déterminé par les pôles de la fonction de Green à une particule. Au chapitre précédent, nous avons vérifié cette propriété dans le cadre d'un développement de perturbations : au premier ordre, les pôles de G nous permettaient de retrouver l'énergie des quasi-particules déterminée par la méthode de Bogoliubov. Nous allons donc dans ce chapitre concentrer notre attention sur l'expression du dénominateur de la fonction de Green à une particule.

I. — Étude du dénominateur de G

Le résultat (3.28) du calcul de Beliaev au second ordre de perturbation fait apparaître, à la limite des grandes longueurs d'onde, un spectre de phonons $\varepsilon_k = sk$. Hugenholtz et Pines ont montré que s était égal à la vitesse du son « macroscopique » $c = (dp/d\rho)^{1/2}$, calculée au même degré d'approximation. Notre objectif est essentiellement de généraliser ce résultat à tous les ordres du développement de perturbations. La vitesse du son microscopique est donnée par les zéros du dénominateur $D(k, \omega)$ de la fonction de Green à une particule, à la limite k, ω petits. Nous nous proposons de comparer le résultat ainsi obtenu à la vitesse du son déduite des lois habituelles de l'acoustique.

Commençons donc par calculer l'expression de la vitesse du son « macroscopique » dans notre formalisme. A température nulle, c est donné par la relation habituelle :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \text{où} \quad \rho = \frac{Nm}{\Omega} = nm \quad \text{est la masse spécifique.}$$

La pression p est définie par $p = -(\partial E_0 / \partial \Omega)_N$. Utilisant la relation (3.10), qui s'écrit $\mu = (\partial E_0 / \partial N)_\Omega$, on obtient :

$$mc^2 = \Omega \frac{\partial}{\partial N} \left[- \left(\frac{\partial E_0}{\partial \Omega} \right)_N \right]_\Omega = - \Omega \left[\frac{\partial \mu}{\partial \Omega} \right]_N = \frac{N}{\Omega} \frac{d\mu}{dn}. \quad (4.1)$$

Dans cette équation, $\frac{d\mu}{dn}$ est une dérivée totale, qui relie les variations infinitésimales $d\mu$ et dn pour le système physique réel. Dans le cadre de notre formalisme, cela signifie que, lorsque μ et n varient, il faut préserver la relation (3.9) qui fixe le paramètre variationnel n_0 . Les variations $d\mu$ et dn doivent donc s'accompagner d'une variation dn_0 , obtenue en différentiant (3.9) :

$$d\mu = \frac{\partial^2 E'_0 / \Omega}{\partial n_0^2} dn_0 + \frac{\partial^2 E'_0 / \Omega}{\partial n_0 \partial \mu} d\mu.$$

La variation de densité dn se calcule alors par différentiation de (3.7) :

$$dn = \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right) dn_0 + \frac{\partial n'}{\partial \mu} d\mu.$$

Éliminons dn_0 des deux équations précédentes et utilisons (3.8). Il vient ainsi :

$$\frac{n}{mc^2} = \frac{\left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right)^2}{\frac{\partial^2 (E'_0 / \Omega)}{\partial n_0^2}} + \frac{\partial n'}{\partial \mu}. \quad (4.2)$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $\Omega = 1$, et nous travaillerons avec les variables intensives n , μ et E'_0 .

D'après (4.2), nous voyons que la vitesse du son « macroscopique » fait intervenir les dérivées partielles de E'_0 par rapport à n_0 et μ . Par contre, la vitesse du son microscopique, donnée par le dénominateur $D(k, \omega)$, fera intervenir les opérateurs de self-énergie M_1 et M_2 , dans la limite où k et ω sont petits. Nous sommes donc amenés à chercher des relations entre les dérivées de E'_0 et le développement de M_1 et M_2 au voisinage de $k, \omega = 0$. La limite $k = \omega = 0$ a été étudiée par Hugenholtz et Pines : nous commencerons par rétablir leur théorème.

Considérons le développement de perturbations de E'_0 et classons les diagrammes vide-vide correspondant en puissances croissantes de l'interaction. Il est alors facile de voir que tous les diagrammes contribuant à $M(k, \omega)$ peuvent être obtenus d'une manière unique à partir des diagrammes contribuant à E'_0 de la façon suivante. Pour $M_1(k, \omega)$, on attribue le quadrimoment (k, ω) à une ligne de vide entrante et à une ligne de vide sortante quelconques ; dans le cas de $M_2(k, \omega)$, on attribue les quadrimoments (k, ω) et $(-k, -\omega)$ respectivement à deux lignes de vide entrantes quelconques. On assure ensuite la conservation de l'énergie et du moment à chaque vertex suivant les règles générales de détermination des diagrammes exposées au chapitre III. Comme il y a des vertex ne conservant pas le nombre de particules, cette opération revient à augmenter le quadrimoment de *certain*s *propagateurs* reliant de façon continue la ligne de vide d'entrée à la ligne de vide de sortie.

A la limite $(k, \omega) = 0$, la contribution du diagramme $M(k, \omega)$ et celle du diagramme E'_0 correspondant sont équivalentes à un facteur n_0 près. Il suffit alors de compter le nombre de diagrammes M différents que l'on peut construire à partir du même diagramme E'_0 pour obtenir une relation entre $M(0, 0)$ et E'_0 . Il y a un point délicat dans l'établissement du théorème : la limite du vertex $\begin{array}{c} -q \nearrow \\ k \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \searrow q+k \\ \searrow \end{array}$ pour $k = 0$ est double de la valeur du vertex $\begin{array}{c} -q \nearrow \\ \searrow q \end{array}$. Cette erreur d'un facteur 1/2 dans le calcul de M sera automatiquement compensée si le diagramme correspondant de M apparaît deux fois. Ceci nous amène à attribuer indépendamment le quadrimoment (k, ω) à chacune des deux lignes de vide du vertex $\begin{array}{c} -q \nearrow \\ \searrow q \end{array}$. Toutes les lignes de vide d'un diagramme peuvent donc être traitées sur le même pied, quel que soit le vertex incomplet auquel elles sont rattachées.

Il est alors facile de voir qu'à partir d'un diagramme E'_0 d'ordre s en n_0 , c'est-à-dire contenant s lignes de vide entrantes et s lignes de vide sortantes, on peut fabriquer s^2 diagrammes $M_1^s(k, \omega)$ différents ayant tous la même limite quand $(k, \omega) = 0$, soit E_0^s/n_0 . On en déduit immédiatement que :

$$M_1^s(0, 0) = s^2 n_0^{-1} E_0^s. \quad (4.3)$$

L'indice s rappelle que l'on travaille sur un diagramme E'_0 particulier d'ordre s en n_0 . De même, on trouve aisément que :

$$M_2^s(0, 0) = s(s-1) n_0^{-1} E_0^s. \quad (4.4)$$

D'autre part, la relation (3.9) peut s'écrire en termes de diagrammes :

$$\mu^{(s)} = s n_0^{-1} E_0^s.$$

Ces relations étant valables quel que soit s , nous en déduisons la relation générale :

$$M_1(0, 0) - M_2(0, 0) = \mu. \quad (4.5)$$

Cette relation, qui constitue le théorème d'Hugenholtz-Pines, assure que le spectre de quasi-particules ne possède pas de « gap » : $\varepsilon(k=0) = 0$ comme on le vérifie immédiatement en insérant (4.5) dans (3.22). De même (4.4) peut se récrire plus généralement :

$$M_2(0, 0) = n_0 \frac{\partial^2 E'_0}{\partial n_0^2}. \quad (4.6)$$

Nous allons maintenant essayer d'étendre ce procédé d'analyse au cas où (k, ω) est petit mais non nul.

2. — Calcul des noyaux de self-énergie $M(k, \omega)$ pour les faibles valeurs de k et ω

L'expression (4.2) de la vitesse du son fait aussi apparaître les quantités $\partial E'_0 / \partial \mu$ et $\partial^2 E'_0 / \partial \mu^2$ qui correspondent aux premiers termes du développement de Taylor de E'_0 obtenu par une variation du potentiel chimique. Dans l'expression de $D(k, \omega)$, ce sont les noyaux de self-énergie qui interviennent. On peut alors se demander s'il n'est pas possible de relier le développement de ces noyaux au voisinage de $(k, \omega) = 0$, aux variations de E'_0 par rapport au potentiel chimique.

Soit un diagramme E_0^s d'ordre s en n_0 contribuant à E'_0 . Le potentiel chimique μ intervient dans tous les propagateurs du diagramme sous la forme :

$$G_0(k_i, \omega_i) = (\omega_i - \varepsilon_{k_i}^0 + \mu + i\delta)^{-1}.$$

L'accroissement $\delta\mu$ peut donc aussi s'interpréter comme un accroissement $\omega = \delta\mu$ de l'énergie ω_i de tous les propagateurs : nous sommes alors conduits à attribuer l'énergie ω à toutes les lignes de vide, de manière à conserver l'énergie à tous les vertex, même aux vertex incomplets (Il va de soi que ceci n'est qu'une commodité d'écriture des diagrammes et ne change en rien leur contribution). Dans la mesure où l'on intègre sur l'énergie des lignes internes, la seule apparence extérieure du passage de μ à $\mu + \delta\mu$ est l'attribution de l'énergie ω à toutes les lignes de vide du diagramme.

Nous avons vu par ailleurs que les opérateurs de self-énergie $M(0, \omega)$ s'obtiennent en attribuant l'énergie ω à deux quelconques lignes de vide, les autres n'étant pas modifiées. Pour relier les dérivées de E'_0 à $M(\omega)$, il nous faut donc comparer les variations d'un diagramme vide-vide obtenues d'une part en modifiant toutes les lignes de vide simultanément, d'autre part en les modifiant deux par deux.

Considérons par exemple le diagramme particulier du second degré en n_0 contribuant à E'_0 représenté sur la figure ci-dessous :

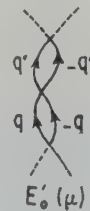


FIG. 12.

Si μ est varié de $\delta\mu$, ce diagramme devient :

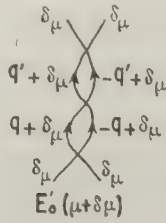


FIG. 13.

Considérons maintenant les diagrammes $M_1(\omega)$ que l'on peut former à partir du diagramme initial. Tenant compte des règles énoncées dans la section précédente, on obtient les quatre diagrammes :

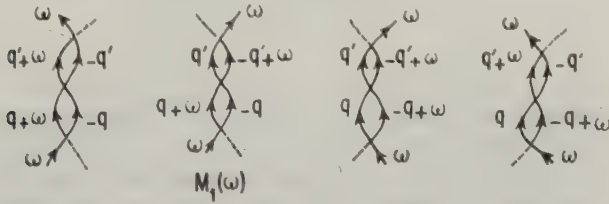


FIG. 14.

Bien que les diagrammes à quatre lignes de vide correspondent tous à la diffusion multiple de deux particules, nous allons schématiser cette discussion dans le but d'illustrer la méthode générale valable quel que soit s que nous développerons ensuite.

Soit donc un diagramme vide-vide du second degré en n_0 : nous pouvons rattacher chacune des quatre lignes de vide à un vertex central A par une suite de lignes internes du diagramme, formant un chemin continu.

Dans le cas $s = 2$ où nous nous plaçons et dans ce cas seulement, on peut attribuer à chaque ligne de vide un chemin qui lui soit propre, suivant le schéma ci-contre :

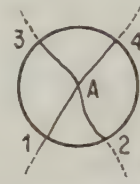


FIG. 15.

Certains de ces chemins peuvent d'ailleurs se réduire à un point : c'est le cas, par exemple, des diagrammes du premier et du deuxième ordre par rapport à l'interaction (Au premier ordre, A ne peut être que l'unique vertex V_g auquel sont attachées les quatre lignes de vide ; au deuxième ordre, deux des lignes de vide se rattachent directement à A). Les résultats que nous allons établir demeurent cependant valables dans ces cas particuliers.

Attribuons l'énergie $\delta\mu$ aux quatre lignes de vide (1...4). De proche en proche, cette correction réagit sur l'énergie des lignes internes constituant les chemins (1-A)...(4-A). Nous pouvons donc concentrer notre attention sur la contribution des chemins (i-A), et sur sa variation lorsqu'on attribue l'énergie $\delta\mu$ à la ligne de vide i (Notons que l'énergie d'une ligne particulière du chemin (i-A) peut varier de $\pm \delta\mu$ selon son orientation par rapport à la ligne de vide i).

Soit a_i la contribution du chemin (i-A), calculée avant intégration sur les k_i et ω_i . L'intégrant de :

$$[E_0'(\mu + \delta\mu) - E_0'(\mu)]$$

sera, d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^4 a_i(\mu + \delta\mu) - a_1 a_2 a_3 a_4 &= \left[\frac{\partial a_1}{\partial \mu} a_2 a_3 a_4 + a_1 \frac{\partial a_2}{\partial \mu} a_3 a_4 + \dots \right] \delta\mu \\ &+ \left[\frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2} a_2 a_3 a_4 + a_1 \frac{\partial^2 a_2}{\partial \mu^2} a_3 a_4 + \dots \right] \frac{\delta\mu^2}{2!} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial \mu} \frac{\partial a_2}{\partial \mu} a_3 a_4 + \frac{\partial a_1}{\partial \mu} a_2 \frac{\partial a_3}{\partial \mu} a_4 + \dots \right] \delta\mu^2 + \mathcal{O}(\delta\mu^3). \end{aligned}$$

De même, l'intégrant de $[M_1(\omega) - M_1(0)]$ sera :

$$\begin{aligned} [a_1(\mu + \delta\mu) a_2 + a_1 a_2(\mu + \delta\mu)] [a_3(\mu + \delta\mu) a_4 + a_3 a_4(\mu + \delta\mu)] - 4 a_1 a_2 a_3 a_4 &= 2 \left[\frac{\partial a_1}{\partial \mu} a_2 a_3 a_4 + a_1 \frac{\partial a_2}{\partial \mu} a_3 a_4 + \dots \right] \omega \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2} a_2 a_3 a_4 + a_1 \frac{\partial^2 a_2}{\partial \mu^2} a_3 a_4 + \dots \right] \frac{\omega^2}{2!} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial \mu} a_2 + a_1 \frac{\partial a_2}{\partial \mu} \right) \left(\frac{\partial a_3}{\partial \mu} a_4 + a_3 \frac{\partial a_4}{\partial \mu} \right) \omega^2. \end{aligned}$$

Considérons enfin le diagramme de M_2 ayant deux lignes entrantes (1 et 2). L'intégrant de $[M_2(\omega) - M_2(0)]$ est égal à :

$$\omega^2 \left[\frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2} a_2 + a_1 \frac{\partial^2 a_2}{\partial \mu^2} - 2 \frac{\partial a_1}{\partial \mu} \frac{\partial a_2}{\partial \mu} \right] a_3 a_4.$$

(Les termes linéaires s'éliminent lorsqu'on échange les énergies ω et $-\omega$ entre les deux lignes entrantes). Pour rendre l'expression ci-dessus plus symétrique, nous introduisons aussi la variation du diagramme M_2 ayant deux lignes sortantes, égale à la précédente par symétrie. En prenant leur demi-somme, on obtient :

$$M_2(\omega) - M_2(0) = \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2} a_2 a_3 a_4 + a_1 \frac{\partial^2 a_2}{\partial \mu^2} a_3 a_4 + \dots \right) \frac{\omega^2}{2} - \left(\frac{\partial a_1}{\partial \mu} \frac{\partial a_2}{\partial \mu} a_3 a_4 + a_1 a_2 \frac{\partial a_3}{\partial \mu} \frac{\partial a_4}{\partial \mu} \right) \omega^2.$$

En comparant ces expressions, nous voyons que :
— au premier ordre en ω , l'intégrant de :

$$[M_1(\omega) - M_1(0)]$$

est double de celui de $[E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)]$;

— au deuxième ordre en ω , l'intégrant de :

$$[E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)]$$

est égal à celui de $[M_1(\omega) - M_2(\omega) - M_1(0) + M_2(0)]$. Ces relations se conservent après intégration. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} M_1(\omega) - M_1(0) = 2n_0^{-1} \omega \frac{\partial E'_0}{\partial \mu} \\ \frac{1}{2} [M_1(\omega) + M_1(-\omega)] \\ - M_2(\omega) - M_1(0) + M_2(0) = n_0^{-1} \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 E'_0}{\partial \mu^2} \end{cases} \begin{cases} \text{valable} \\ \text{pour les} \\ \text{diagrammes} \\ \text{de } E'_0 \text{ de degré} \\ s = 2 \text{ en } n_0. \end{cases}$$

Cette discussion du cas $s = 2$ s'avère très simple, car on peut attribuer un chemin distinct à chaque ligne de vide. Lorsque $s > 2$, ceci n'est plus possible, car le vertex central A n'a toujours que quatre branches. Le cas particulier précédent permet néanmoins de dégager le principe de la démonstration générale que nous allons maintenant exposer.

Considérons un diagramme contribuant à $M^s(\omega)$ construit à partir de $E'_0{}^s$ en attribuant l'énergie ω à deux lignes de vide quelconques. Nous avons vu dans la section précédente que ce diagramme s'obtenait à partir de $E'_0{}^s$ en augmentant l'énergie de certains propagateurs formant un trajet continu de l'entrée à la sortie du noyau de self-énergie. Il y a un très grand nombre de choix possibles pour tracer ce chemin continu, tous équivalents dans la mesure où l'on fait un calcul explicite du diagramme. Tel n'est évidemment pas notre but, aussi devons-nous déterminer de façon unique les lignes internes dont l'énergie va varier.

Une solution particulièrement pratique, suggérée par la discussion du cas $s = 2$, consiste à rattacher toutes les lignes de vide à un vertex central A, par des « chemins » ($i - A$) constitués d'une succession de propagateurs. Contrairement au cas $s = 2$, ces différents chemins auront nécessairement des tronçons communs. Nous les choisissons en les faisant *rayonner* depuis le vertex A : deux chemins qui divergent ne se rencontrent plus par la suite. Dans ces conditions, il n'y a qu'une manière de se rendre de la ligne de vide i au vertex central A. Ce processus de réduction est illustré sur la figure ci-dessous (les propagateurs situés en dehors des trajets ($i - A$) ne sont pas représentés).

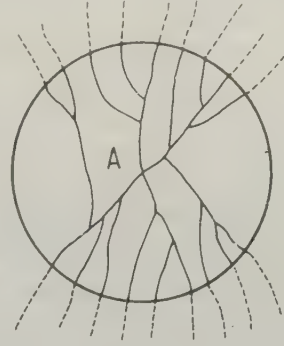


FIG. 16.

Considérons alors le diagramme de M obtenu en augmentant l'énergie des deux lignes de vide i et j . Nous pouvons choisir comme trajet continu reliant i à j le trajet (iAj). Cette prescription est unique et parfaitement définie. Cependant, si les chemins ($i - A$) et ($j - A$) ont un tronçon commun AB, celui-ci est

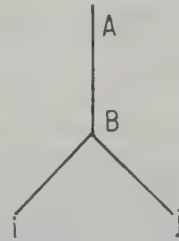


FIG. 17.

parcouru deux fois en sens inverse : les variations correspondantes s'annulent l'une avec l'autre. Nous pouvons alors supprimer le tronçon (AB), et relier i et j par le trajet le plus court (iBj). Dans ces conditions, le vertex central A ne joue plus aucun rôle particulier.

En résumé, pour calculer $M(\omega)$, il suffit de corriger l'énergie des propagateurs le long du trajet continu

reliant les lignes extérieures i et j . Au contraire, on obtient $E'_0(\mu + \delta\mu)$ en augmentant l'énergie de toutes les lignes de vide. De proche en proche, cela nous amène à corriger l'énergie le long de tous les chemins ($i - A$). Les autres lignes internes du diagramme, que nous n'avons pas représentées, ne sont pas modifiées : elles ne jouent aucun rôle.

Dans la contribution d'un diagramme, seuls les facteurs G_0 dépendent de l'énergie. Considérons donc un propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ situé sur un ou plusieurs des chemins ($i - A$). Ce propagateur sépare les lignes

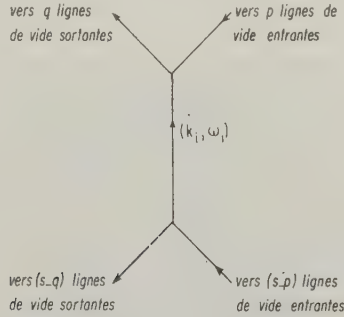


FIG. 18.

de vide en deux groupes distincts. De son extrémité, on peut se diriger vers p lignes de vide entrantes et q lignes de vide sortantes ; son origine est reliée à $(s - p)$ lignes de vide entrantes et $(s - q)$ lignes de vide sortantes. Nous n'avons pas besoin de préciser la position du vertex central A par rapport au propagateur (k_i, ω_i) .

Comme dans la discussion du cas particulier $s = 2$, nous raisonnons sur les intégrants. Considérons d'abord un diagramme contribuant à $E'_0(\mu + \delta\mu)$. Pour assurer la conservation de l'énergie introduite par les lignes de vide, il faut remplacer l'énergie du propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ par $[\omega + (q - p)\omega]$. La contribution du diagramme contient donc un facteur :

$$G_0[k_i, \omega_i + (q - p)\omega].$$

Considérons maintenant un diagramme $M^s(\omega)$. Si le propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ se trouve sur le trajet reliant les deux lignes extérieures, son énergie varie de $\pm \omega$. Par contre, s'il se trouve en dehors de ce trajet, son énergie n'est pas modifiée. En se reportant à la figure ci-dessus, on déduit aisément que parmi les s^2 diagrammes $M^s_1(\omega)$, $q(s - p)$ d'entre eux contiennent le facteur $G_0(k_i, \omega_i + \omega)$

et $p(s - q)$ le facteur $G_0(k_i, \omega_i - \omega)$.

Au premier ordre en ω , nous pouvons réexprimer ces résultats de la façon suivante : si nous isolons la contribution contenant la variation du propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$, soit :

$$\omega \frac{\partial G_0(k_i, \omega_i)}{\partial \mu},$$

elle apparaît :

dans $[E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)]$ avec le facteur $(q - p)$,
dans $[M^s_1(\omega) - M^s_1(0)]$ avec le facteur :

$$q(s - p) - p(s - q) = s(q - p).$$

Le propagateur ayant été choisi arbitrairement, l'intégrant de $[M^s_1(\omega) - M^s_1(0)]$ est donc s fois plus grand que l'intégrant de $[E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)]$. L'intégration ne modifie pas ce rapport, et on a au premier ordre en $\omega = \delta\mu$:

$$[M^s_1(\omega) - M^s_1(0)] = s n_0^{-1} [E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)], \quad (4.7)$$

soit :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [M^s_1(\omega) - M^s_1(0)] = s n_0^{-1} \omega \frac{\partial E'_0}{\partial \mu}.$$

Cette relation étant valable, quel que soit le degré s du diagramme, se généralise suivant :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [M_1(\omega) - M_1(0)] = \omega \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial E'_0}{\partial \mu} = -\omega \frac{\partial n'}{\partial n_0}. \quad (4.8)$$

Nous vérifions que (4.7) est compatible avec le résultat obtenu dans le cas particulier $s = 2$, qu'il permet d'étendre à toutes les valeurs de s .

Au premier ordre en ω , nous n'avons pas cherché de relation pour $M_2(\omega)$ qui est pair en ω . Au deuxième ordre, $M_2(\omega)$ a une contribution non nulle. Comme précédemment, nous considérons la demi-somme des diagrammes à deux lignes entrantes et deux lignes sortantes. On vérifie alors facilement que parmi les $s(s - 1)$ diagrammes contribuant à $M_2(\omega)$, $p(s - p)$ d'entre eux contiennent le facteur $G_0(k_i, \omega_i + \omega)$, $q(s - q)$ le facteur $G_0(k_i, \omega_i - \omega)$ (les autres étant inchangés).

Isolons la contribution contenant la variation du deuxième ordre de $G_0(k_i, \omega_i)$, soit :

$$\frac{\omega^2}{2!} \frac{\partial^2 G_0(k_i, \omega_i)}{\partial \mu^2}.$$

Elle a :

dans $[E'_0(\mu + \delta\mu) - E'_0(\mu)]$ le facteur $(q - p)^2$,
dans $[M^s_1(\omega) - M^s_1(0)]$ le facteur $[q(s - p) + p(s - q)]$,
et dans $[M^s_2(\omega) - M^s_2(0)]$ le facteur $[p(s - p) + q(s - q)]$.

Comme dans le cas particulier $s = 2$, on vérifie que le premier facteur est égal à la différence des deux autres.

Pour calculer M et E'_0 au deuxième ordre, nous devons aussi tenir compte du produit des variations du premier ordre de deux propagateurs quelconques.

Deux tels propagateurs peuvent se représenter symboliquement par

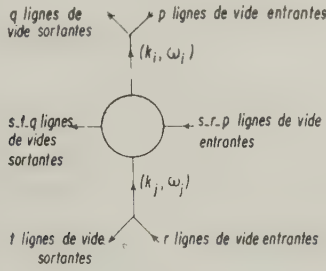


FIG. 19.

Procédant de la même manière que précédemment, nous trouvons dans $E_0^s(\mu + \delta\mu)$ le facteur :

$$[G_0(k_i, \omega_i + (q-p)\omega)G_0(k_j, \omega_j + (r-t)\omega)].$$

Parmi les diagrammes contribuant à $M_1^s(\omega)$, rq contiennent le facteur :

$$[G_0(k_i, \omega_i + \omega)G_0(k_j, \omega_j + \omega)]$$

et tp le facteur :

$$[G_0(k_i, \omega_i - \omega)G_0(k_j, \omega_j - \omega)].$$

De même, chacune de ces deux combinaisons apparaît $\frac{1}{2}(rp + tq)$ fois dans $M_2(\omega)$; les autres types de produit ne nous intéressent pas, car ils ne fournissent pas de termes du deuxième ordre croisés.

Si nous isolons la contribution contenant le terme :

$$\omega^2 \frac{\partial G_0(k_i, \omega_i)}{\partial \mu} \frac{\partial G_0(k_j, \omega_j)}{\partial \mu},$$

elle apparaît :

dans $[E_0^s(\mu + \delta\mu) - E_0^s(\mu)]$ avec le facteur $(q-p)(r-t)$,
 dans $[M_1^s(\omega) - M_1^s(0)]$ avec le facteur $rq + tp$,
 dans $[M_2^s(\omega) - M_2^s(0)]$ avec le facteur $rp + tq$.

Le premier facteur est encore égal à la différence des deux autres. Ceci, étant vérifié quel que soit le choix des propagateurs, reste donc valable pour le diagramme dans son ensemble, ce qui nous conduit à la relation suivante, valable au deuxième ordre en $\omega = \delta\mu$:

$$[M_1^s(\omega) - M_1^s(0)] - [M_2^s(\omega) - M_2^s(0)] = n_0^{-1} [E_0^s(\mu + \delta\mu) - E_0^s(\mu)]$$

soit :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2} [M_1^s(\omega) + M_1^s(-\omega)] - M_2^s(\omega) - [M_1^s(0) - M_2^s(0)] = n_0^{-1} \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 E_0^s}{\partial \mu^2}. \quad (4.9)$$

Cette relation, valable quel que soit s , se généralise suivant :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2} [M_1(\omega) + M_1(-\omega)] - M_2(\omega) - \mu = -n_0^{-1} \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial n'}{\partial \mu} \quad (4.10)$$

où nous avons utilisé la relation (4.5).

Les relations (4.8) et (4.10) s'avéreront extrêmement utiles. Elles ont été obtenues en calculant la variation de l'énergie E'_0 due à une variation $\delta\mu$ du potentiel chimique, se traduisant par un accroissement $\omega = \delta\mu$ de l'énergie de tous les propagateurs. Nous allons maintenant chercher des relations analogues, faisant intervenir une variation, non plus de l'énergie, mais du moment de tous les propagateurs. A cet effet, observons le système d'un référentiel en translation

uniforme à la vitesse $\vec{v} = -\frac{\hbar \vec{\delta q}}{m}$: le moment de toutes les particules du système apparaît augmenté de $+\delta\vec{q}$. Le réservoir de particules de quadrimoment nul devient un réservoir de particules de moment $\vec{\delta q}$. Le calcul de $E'_0(\vec{\delta q})$ sera donc justiciable de la même analyse que celui de $E'_0(\mu + \delta\mu)$, ω étant remplacé par $\vec{\delta q}$.

Pour un système invariant par translation, on peut calculer directement cette variation d'énergie : l'interaction binaire entre les particules ne dépendant que de leurs positions relatives, l'énergie potentielle est invariante dans le changement de référentiel. Seule l'énergie cinétique sera modifiée. Comme la phase condensée est éliminée de notre formalisme, nous obtenons :

$$E'_0(\vec{\delta q}) - E'_0 = \sum_k' \left[\frac{\hbar^2 (\vec{k} + \vec{\delta q})^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right] n_k.$$

L'état de base étant invariant par réflexion, les termes linéaires en $\vec{\delta q}$ s'éliminent. Nous trouvons finalement :

$$E'_0(\vec{\delta q}) - E'_0 = n' \frac{\hbar^2 (\vec{\delta q})^2}{2m}. \quad (4.11)$$

Si nous attribuons le moment $\vec{\delta q}$ à toutes les lignes de vide, de proche en proche le moment de tous les chemins est modifié comme dans le cas de la variation du potentiel chimique. Mais cette fois, la modification porte simultanément sur les propagateurs et sur les vertex. En ce qui concerne les propagateurs, la discussion précédente reste valable : il suffit de remplacer ω par $\vec{\delta q}$. Il reste maintenant à vérifier que les variations des vertex conduisent aux mêmes relations (4.7) et (4.9).

Nous allons donc étudier les variations subies par un vertex quelconque dans les différents cas où d'une part toutes les lignes de vide ont le moment $\vec{\delta q}$ et où d'autre part seules deux lignes de vide sont modifiées,

Nous pouvons représenter schématiquement un vertex par :

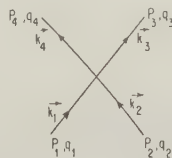


FIG. 20.

Si on suit la ligne de moment k_i on se dirige vers p_i lignes de vide entrantes et q_i lignes de vide sortantes :

$$\sum_{i=1}^4 p_i = \sum_{i=1}^4 q_i = s.$$

Si on donne l'accroissement $\delta \vec{q} = \vec{k}$ au moment de toutes les lignes, ce vertex se trouve en facteur dans $E_0^s(\delta \vec{q})$ sous la forme :

$$V \{ \vec{k}_4 - \vec{k}_2 + [(q_4 - p_4) - (p_2 - q_2)] \vec{k} \} + id(2 \rightarrow 1).$$

Si nous considérons les s^2 diagrammes contribuant à $M_1^s(k)$ formés à partir de E_0^s , nous trouvons le facteur $V(\vec{k}_4 - \vec{k}_2 + \vec{k})$ dans $(p_1 + p_3)(q_2 + q_4)$ de ces diagrammes et le facteur $V(\vec{k}_4 - \vec{k}_2 - \vec{k})$ dans $(q_1 + q_3)(p_2 + p_4)$ diagrammes.

Au premier ordre en $\vec{k}$, si nous isolons la contribution contenant la variation de ce seul vertex, elle apparaît avec le facteur :

$$q_2 + q_4 - (p_2 + p_4) \text{ dans } [E_0^s(\delta \vec{q}) - E_0^s],$$

et le facteur :

$$(p_1 + p_3)(q_2 + q_4) - (q_1 + q_3)(p_2 + p_4) = s[q_2 + q_4 - (p_2 + p_4)]$$

dans :

$$[M_1^s(k) - M_1^s(0)].$$

(4.7) se transpose donc suivant :

$$[M_1^s(k) - M_1^s(0)] = s n_0^{-1} [E_0^s(\delta \vec{q}) - E_0^s]$$

au premier ordre en $\delta \vec{q} = \vec{k}$, soit :

$$\lim_{k \rightarrow 0} [M_1(k) - M_1(0)] = \frac{\partial}{\partial n_0} [E_0'(\delta \vec{q}) - E_0'] = 0 \text{ d'après (4.11)}$$

Ce résultat est *a priori* évident : les noyaux $M(k)$ étant pairs en $\vec{k}$, ils ne peuvent contenir de terme du premier ordre.

Au deuxième ordre en k , isolons de nouveau la contri-

bution contenant la variation de ce seul vertex. Elle apparaît avec les facteurs :

$$[(q_2 + q_4) - (p_2 + p_4)]^2 \text{ dans } [E_0^s(\delta \vec{q}) - E_0^s],$$

$$[(p_1 + p_3)(q_2 + q_4) + (q_1 + q_3)(p_2 + p_4)] \text{ dans } [M_1^s(k) - M_1^s(0)],$$

et :

$$[(q_1 + q_3)(q_2 + q_4) + (p_1 + p_3)(p_2 + p_4)] \text{ dans } [M_2^s(k) - M_2^s(0)].$$

On vérifie que le premier facteur est égal à la différence des deux autres. La même méthode permet de montrer que le produit de la variation du premier ordre d'un vertex quelconque par celle d'un autre vertex ou d'un propagateur conduit au même résultat. (4.9) se transpose donc suivant :

$$[M_1^s(k) - M_1^s(0)] - [M_2^s(k) - M_2^s(0)] = n_0^{-1} [E_0^s(\delta \vec{q}) - E_0^s] \quad (4.12)$$

valable au deuxième ordre en $\vec{k} = \delta \vec{q}$.

Utilisant (4.11) et (4.10), on obtient la relation générale :

$$\lim_{(k, \omega) \rightarrow 0} \frac{1}{2} [M_1(k, \omega) + M_1(k, -\omega)] - M_2(k, \omega) - \mu$$

$$= n_0^{-1} \left(n' \frac{k^2}{2m} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial n'}{\partial \mu} \right). \quad (4.13)$$

3. — Spectre des quasi-particules de grande longueur d'onde

Nous pouvons maintenant calculer le dénominateur de la fonction de Green à une particule dans la limite $(k, \omega) \rightarrow 0$ au deuxième ordre en (k, ω) . D'après (3.22) :

$$D(k, \omega) = \left\{ \omega - \frac{1}{2} [M_1(k, \omega) - M_1(k, -\omega)] \right\}^2$$

$$- \left\{ \frac{k^2}{2m} - \mu + \frac{1}{2} [M_1(k, \omega) + M_1(k, -\omega)] + M_2(k, \omega) \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{k^2}{2m} - \mu + \frac{1}{2} [M_1(k, \omega) + M_1(k, -\omega)] - M_2(k, \omega) \right\} + i\delta.$$

Les relations (4.5) (4.8) et (4.13) nous permettent d'écrire :

$$\lim_{(k, \omega) \rightarrow 0} D(k, \omega) = \omega^2 \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right)^2$$

$$- \frac{2M_2(0, 0)}{n_0} \left(\frac{nk^2}{2m} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial n'}{\partial \mu} \right) + i\delta.$$

Si nous utilisons (4.6), nous pouvons mettre l'expression précédente sous la forme :

$$\lim_{(k, \omega) \rightarrow 0} D(k, \omega) = \frac{M_2(0, 0)}{n_0} \frac{n}{mc^2} (\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta). \quad (4.14)$$

Nous voyons ainsi apparaître la vitesse du son (4.2). Notons qu'à l'ordre k^2 il n'y a pas d'amortissement

des quasi-particules de grande longueur d'onde. Ce résultat fondamental confirme les résultats obtenus par les méthodes de perturbations aux plus bas ordres dans le cas du gaz dilué : à température nulle les quasi-particules de grande longueur d'onde sont des phonons satisfaisant la relation de dispersion $\varepsilon_k = ck$ où c est la vitesse du son « macroscopique » dans ^4He liquide. Dans cette région, le spectre des quasi-particules est identique au spectre des excitations élémentaires de Landau : nous retrouverons ce résultat au chapitre VII.

Nous pouvons donner, dans cette limite, l'expression de la fonction de Green à une particule définie par (3.22) :

$$G(k, \omega) = \frac{\omega + \varepsilon_k^0 - \mu + M_1(k, -\omega)}{D(k, \omega)}.$$

A la limite $(k, \omega) \rightarrow 0$, le numérateur s'écrit :

$$M_1(0, 0) - \mu + \mathcal{O}(\omega).$$

Utilisant (4.5), nous voyons apparaître $M_2(0, 0)$, qui compense le facteur correspondant du dénominateur (4.14), d'où :

$$\lim_{(k, \omega) \rightarrow 0} G(k, \omega) = \frac{n_0}{n} mc^2 \frac{1 + \mathcal{O}(\omega)}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta}. \quad (4.15)$$

On peut analyser plus finement ce résultat en introduisant la représentation spectrale de la fonction de Green à une particule. Reportons-nous à l'équation (3.13) et définissons les « densités spectrales » :

$$\begin{aligned} A(k, E) &= \sum_n |(a_k^*)_0^n|^2 \delta(E - \omega_{n0}) \\ B(k, E) &= \sum_n |(a_k)_0^n|^2 \delta(E - \omega_{n0}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où :

$$(a_k)_0^n = \langle \psi_n | a_k | \psi_0 \rangle,$$

$|\psi_n\rangle$ étant état propre de H' avec l'énergie d'excitation ω_{n0} . On vérifie alors que :

$$G(k, \omega) = - \int_0^{+\infty} \left[\frac{A(k, E)}{E - \omega - i\delta} + \frac{B(k, E)}{E + \omega - i\delta} \right] dE. \quad (4.17)$$

Cette expression constitue la représentation spectrale cherchée.

Se reportant à (4.16), on peut inférer l'allure générale de (4.17). En effet, considérons la définition de $A(k, E)$. L'opérateur de création d'une particule nue a_k^* va coupler l'état de base $|\psi_0\rangle$ à deux sortes d'états excités $|\psi_n\rangle$. La première correspond à des configurations à plusieurs quasi-particules de moment total k dont l'énergie totale varie continûment en fonction de l'énergie de chaque composante. Cela se traduit pour $A(k, E)$ par une contribution continue, régulière, s'étendant sur une gamme finie de valeurs

de E . Cette gamme possède un seuil ck , correspondant à l'énergie minimum d'une configuration de moment k .

D'autre part, a_k^* couple aussi $|\psi_0\rangle$ à l'état contenant une quasi-particule de moment k plus ou moins isolée : cela se traduira pour $A(k, E)$ par un pic plus ou moins bien défini. La résolution de ce pic dépend de la durée de vie de la quasi-particule. Soit z_k l'aire contenue dans le pic de $A(k, E)$. A la lumière de la discussion précédente, nous pouvons mettre $A(k, E)$ sous la forme approchée :

$$A(k, E) = z_k \delta(E - \varepsilon_k) + A^{\text{inc}}(k, E)$$

où $A^{\text{inc}}(k, E)$ représente le fond continu.

Une discussion semblable peut être effectuée pour $B(k, E)$. Ce qui nous permet d'écrire (4.17) sous la forme :

$$G(k, \omega) = \frac{z_k}{\omega - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{z'_k}{\omega + \varepsilon_k - i\delta} - \int_0^\infty \left[\frac{A^{\text{inc}}(k, E)}{E - \omega - i\delta} + \frac{B^{\text{inc}}(k, E)}{E + \omega - i\delta} \right] dE, \quad (4.18)$$

[z'_k étant le résidu correspondant de la densité $B(k, E)$].

Les deux premiers termes de G mettent en évidence les pôles de la fonction de Green, situés en $\pm \varepsilon_k$, de résidus respectifs z_k et $-z'_k$. Le dernier terme de G est une contribution « incohérente », provenant du fond continu des densités spectrales.

Comparons l'expression générale (4.18) avec le résultat (4.15) obtenu lorsque $(k, \omega) \rightarrow 0$. On voit que :

$$\lim_{k \rightarrow 0} z_k = \lim_{k \rightarrow 0} z'_k = \frac{n_0}{n} \frac{mc^2}{2ck}. \quad (4.19)$$

Cette contribution « cohérente » est singulière lorsque $k \rightarrow 0$. Elle l'emporte certainement sur la contribution incohérente qui, elle, est au plus finie, sinon nulle. Ceci nous permet de calculer le nombre moyen de particules nues de moment k dans l'état $|\psi_0\rangle$:

$$n_k = \int_0^\infty B(k, E) dE.$$

Utilisant (4.19), on voit que le terme dominant dans la limite k petit sera :

$$\lim_{k \rightarrow 0} n_k = \frac{n_0}{n} \frac{mc^2}{2ck}.$$

La divergence pour $k \rightarrow 0$, observée à l'ordre le plus bas, persiste aux ordres supérieurs du calcul de perturbation.

Nous concluons ce chapitre par une discussion de la validité de la méthode employée. Comme nous l'avons déjà remarqué, le développement de E'_0 en série de perturbations diverge hautement. Nous introduisons donc implicitement un cut-off arbitraire aux petites valeurs des moments intermédiaires de manière à

rendre les intégrales convergentes. Si la somme de tous les diagrammes vide-vide a une limite, cette limite est E'_0 et le procédé est justifié, le résultat ne dépendant pas du cut-off. Comme Hugenholtz et Pines le remarquent, un critère pour l'existence de cette limite n'est pas connu et nous sommes réduits à justifier nos résultats par de seuls arguments de vraisemblance. Dans le cadre d'un développement de pertur-

bations, nous sommes forcés d'admettre l'existence de cette limite. En réalité, ces divergences ne sont pas physiques, et sont introduites artificiellement par la décomposition $H = H_0 + H_1$ que nous avons effectuée. On peut certainement s'en affranchir en utilisant un formalisme non perturbatif, du type proposé par Martin et Schwinger.

V. — ÉTUDE DES FONCTIONS DE CORRÉLATION

La réponse linéaire du système de particules à une excitation extérieure faible peut s'exprimer au moyen des fonctions de corrélation des fluctuations de densité et de courant du système. Ces fonctions s'expriment toutes à partir d'une forme particulière de la fonction de Green à deux particules que nous allons tout d'abord définir.

La fonction de Green de deux particules la plus générale s'écrit :

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \psi_0 | T \{ \psi(x_1) \psi(x_2) \psi^*(x_3) \psi^*(x_4) \} | \psi_0 \rangle$$

où x_i représente l'ensemble des variables $\vec{r}_i, t_i$.

Si l'on passe à la représentation dans l'espace des moments, on trouve :

$$K(k_i, t_i) = \langle \psi_0 | T \{ a_{k_1}(t_1) a_{k_2}(t_2) a_{k_3}^*(t_3) a_{k_4}^*(t_4) \} | \psi_0 \rangle.$$

Pour un système uniforme, cette valeur moyenne sera non nulle si le moment est conservé, soit $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$. Nous ne disposons plus que de trois variables indépendantes, soit $\vec{q}, \vec{q}'$ et $\vec{k}$ à partir desquelles nous exprimons les $\vec{k}_i$. La fonction de Green particulière que nous retrouverons dans les fonctions de corrélation est définie par :

$$\begin{aligned} t_4 &= t_1 + 0 \\ t_3 &= t_2 + 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} K(\vec{q}, \vec{q}', \vec{k}, t - t') \\ = \langle \psi_0 | T \left\{ a_{\vec{q} - \frac{\vec{k}}{2}}^*(t) a_{\vec{q} + \frac{\vec{k}}{2}}(t) a_{\vec{q}' + \frac{\vec{k}}{2}}^*(t') a_{\vec{q}' - \frac{\vec{k}}{2}}(t') \right\} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nous remarquons que la fonction (5.1) ne dépend que de la différence $(t - t')$. Nous pouvons calculer sa transformée de Fourier par rapport au temps, qui dépend d'une variable d'énergie ω . Les pôles de K par rapport à ω fournissent l'énergie des modes collectifs du système, au même titre que ceux de G donnaient l'énergie des quasi-particules,

1. — Réponse du système à une excitation extérieure

Commençons donc par étudier la réponse linéaire du système à une perturbation extérieure. Introduisons adiabatiquement cette perturbation au système en équilibre, qui se traduit mathématiquement par un hamiltonien d'interaction hermitique de la forme :

$$H_1 = A f(t) + A^* \bar{f}(t)$$

en représentation de Schrödinger où $f(t)$ est tel que

$$f(t = -\infty) = 0.$$

Un calcul de perturbation au premier ordre mené dans la représentation d'interaction nous permet d'obtenir la valeur moyenne d'un opérateur B au temps t , sous la forme :

$$\begin{aligned} [\langle B \rangle - B_0](t) \\ = i \int_{-\infty}^t \langle \psi_0 | [A(t') f(t') + A^*(t') \bar{f}(t'), B(t)] | \psi_0 \rangle dt'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans le cas particulier d'une interaction de la forme :

$$H_1 = A e^{-i\omega t} e^{\eta t} + \text{c.c.}, \quad (5.3)$$

le commutateur ne dépend que de la différence $(t - t')$ et la transformée de Fourier de la réponse s'écrit :

$$\begin{aligned} [\langle B \rangle - B_0](\omega') \\ = 2\pi [K_{BA}(\omega) \delta(\omega - \omega') + K_{BA}^*(-\omega) \delta(\omega + \omega')] \end{aligned} \quad (5.4)$$

où :

$$K_{BA}(\omega) = i \int_0^\infty e^{i(\omega - \eta)t} \langle \psi_0 | [A, B(t)] | \psi_0 \rangle dt.$$

Pour calculer $K_{BA}(\omega)$, nous introduisons les états propres du hamiltonien non perturbé, $|\psi_n\rangle$ d'énergie E_n . Il vient :

$$K_{BA}(\omega) = \sum_n \left\{ \frac{B_{0n} A_{n0}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{A_{0n} B_{n0}}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right\} \quad (5.5)$$

où on a utilisé les notations :

$$\omega_{n0} = E_n - E_0; A_{n0} = \langle \psi_n | A | \psi_0 \rangle.$$

Définissons la fonction de corrélation des opérateurs A et B par :

$$iF_{BA}(t-t') = \langle \psi_0 | T \{ B(t)A(t') \} | \psi_0 \rangle \quad (5.6)$$

et sa transformée de Fourier par :

$$F_{BA}(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_{BA}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}.$$

Nous voyons que :

$$F_{BA}(\omega) = \sum_n \left\{ \frac{B_{0n}A_{n0}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{A_{0n}B_{n0}}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} \right\}. \quad (5.7)$$

Nous pouvons choisir, par définition, $\omega > 0$. Comme ω_{n0} est toujours positif, on voit alors que $F_{BA}(\omega) = K_{BA}(\omega)$. Au lieu de K_{BA} , nous pouvons donc étudier F_{BA} qui s'introduit beaucoup plus naturellement dans notre formalisme de perturbations. L'expression générale de la réponse (5.4) se réécrit :

$$[\langle B \rangle - B_0](\omega') = 2\pi [F_{BA}(\omega)\delta(\omega - \omega') + (F_{BA}^*(\omega))\delta(\omega + \omega')] \quad (\text{où } \omega > 0).$$

Nous allons maintenant considérer la réponse du système dans le cas particulier d'un champ extérieur scalaire ou vectoriel.

a) **Fluctuations de densité et de courant induites par l'introduction de particules extérieures interagissant avec les particules du système.** — Soit $\rho_1(\vec{r}, t)$ la distribution des particules introduites et $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ l'interaction binaire entre les particules extérieures et les particules du système. Les particules étrangères créent, au point $\vec{r}$, le potentiel :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' V(\vec{r} - \vec{r}') \rho_1(\vec{r}', t).$$

L'interaction avec le système est :

$$H_1 = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) = \sum_k \Phi_k(t) \rho_{-k}.$$

Calculons la réponse à une composante de Fourier de la distribution ρ_1 , soit :

$$\rho_1(\vec{r}, t) = r_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (5.8)$$

$$H_1 = V_k [r_k \rho_{-k} e^{-i\omega t} + \bar{r}_k \rho_k e^{i\omega t}].$$

Nous nous proposons de rechercher la valeur moyenne de l'opérateur $B = \rho_{k'}$. Nous pouvons appliquer les résultats précédents, et nous trouvons ainsi :

$$\langle \rho_{k'} \rangle (\omega') = 2\pi r_k V_k F_{\rho_{k'} \rho_{-k}}(\omega) \delta(\omega - \omega') + 2\pi \bar{r}_k V_k [F_{\rho_{-k} \rho_{-k}}(\omega)]^* \delta(\omega + \omega');$$

$$iF_{\rho_{k'} \rho_{-k}}(t-t') = \langle \psi_0 | T \{ \rho_{k'}(t) \rho_{-k}(t') \} | \psi_0 \rangle.$$

Pour un système uniforme, le moment doit être conservé, et cette valeur moyenne ne sera différente de zéro que si $\vec{k}' = \vec{k}$; on posera donc :

$$F_{\rho_{k'} \rho_{-k}}(t-t') = F_{44}(k, t-t') \delta_{kk'}$$

où :

$$iF_{44}(k, t-t') = \langle \psi_0 | T \{ \rho_k(t) \rho_{-k}(t') \} | \psi_0 \rangle. \quad (5.9)$$

La réponse du système à la perturbation (5.8) s'écrit alors :

$$\langle \rho_{k'} \rangle (\omega') = 2\pi r_k V_k F_{44}(k, \omega) \delta_{kk'} \delta(\omega - \omega') + 2\pi \bar{r}_k V_k F_{44}^*(k, \omega) \delta_{k, -k'} \delta(\omega + \omega').$$

Si nous nous intéressons seulement à la composante k de fréquence ω , il vient :

$$\langle \rho_k \rangle (\omega) = 2\pi r_k V_k F_{44}(k, \omega).$$

De même, la composante k de la densité du courant de particules induit par cette distribution de charge extérieure est :

$$\langle j_{ki} \rangle (\omega) = 2\pi r_k V_k F_{i4}(k, \omega)$$

où :

$$iF_{i4}(k, t-t') = \langle \psi_0 | T \{ j_{ki}(t) \rho_{-k}(t') \} | \psi_0 \rangle. \quad (5.10)$$

b) **Fluctuations de densité et de courant induites par la rotation du système.** — Enfermons le liquide dans un récipient cylindrique que nous faisons tourner autour de son axe avec la vitesse angulaire ω . Blatt, Butler et Schafroth ont étudié très en détail le problème du calcul du moment d'inertie d'un liquide en mécanique statistique quantique. Ils ont montré qu'il était essentiel d'assurer des conditions aux limites indépendantes du temps et donc de calculer les quantités physiques caractérisant le liquide dans un référentiel en rotation avec le récipient. Nous devons alors calculer l'expression du hamiltonien dans ce nouveau système d'axes. Nous indiquerons par un prime toutes les quantités dans le repère en rotation. Si $\vec{v}$ est la vitesse d'une particule dans le référentiel fixe, elle est reliée à $\vec{v}'$ par la loi habituelle de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

où $\vec{\omega} \times \vec{r}$ est la vitesse d'entraînement au point $\vec{r}$.

Calculons l'expression du Lagrangien en fonction des nouvelles quantités :

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m v_i'^2 - V$$

où V est l'énergie potentielle, invariante dans le changement d'axes. Reportant l'expression de $\vec{\rho}$ dans cette équation, on obtient :

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\rho}_i^2 + \sum_i m \dot{\rho}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 - V.$$

On vérifie l'égalité des moments dans les deux référentiels ; en effet :

$$\vec{p}_i' = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}_i} = m \dot{\rho}_i + m \vec{\omega} \times \vec{r}_i = m \dot{\rho}_i = \vec{p}_i.$$

Enfin, le hamiltonien $H' = \sum_i \vec{p}_i' \cdot \dot{\rho}_i' - L$ peut s'exprimer en fonction du hamiltonien H dans le référentiel fixe :

$$H' = \sum_i \frac{1}{2m} [\vec{p}_i' - m(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]^2 - \frac{1}{2} \sum_i m (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + V,$$

soit :

$$H' = H - \vec{\omega} \cdot \vec{M}$$

où $\vec{M}$ est le moment angulaire total du système, égal, dans les deux référentiels, à $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, puisque les moments sont identiques. Les propriétés du produit mixte nous permettent d'écrire :

$$H' = H - m \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.11)$$

où $\vec{A}(\vec{r})$ est le champ des vitesses d'entraînement $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ et où le courant :

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{p}_i}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \frac{\vec{p}_i}{m} \right].$$

L'hamiltonien (5.11) est formellement identique au hamiltonien d'interaction d'un champ électromagnétique faible avec un système de particules chargées.

Notre problème est de mesurer la densité du courant total induit par la rotation du récipient. L'étude de Blatt et al. déjà citée indique que nous devons effectuer un tel calcul dans le référentiel en rotation. Nous voulons donc calculer la valeur moyenne $\sum_i \langle \vec{\rho}_i' \rangle$ dans l'état fondamental de l'hamiltonien H' . On a vu que :

$$\vec{\rho}_i' = \frac{\vec{p}_i'}{m} - \vec{A}.$$

Par conséquent, la densité de courant total est donnée par :

$$\vec{j}^{\text{tot}}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) - N \vec{A}(\vec{r}),$$

Nous voyons qu'elle se compose de deux termes :

a) le terme $-N\vec{A}$ correspond au courant d'entraînement, si on suppose la distribution du liquide immobile dans le repère fixe, et est l'analogue du courant « diamagnétique » dans la réponse d'un gaz de particules chargées à un champ électromagnétique ;

b) le terme $\vec{j}(\vec{r})$, équivalent du courant « paramagnétique », correspond au courant dans le repère absolu.

Si la rotation est suffisamment lente, le deuxième terme de l'hamiltonien (5.11) peut être traité comme une perturbation, et on peut appliquer au calcul du courant total la théorie générale de la réponse linéaire que nous venons de développer. Auparavant, nous allons essayer de prévoir l'allure générale du résultat, par des arguments qualitatifs.

Dans le cas d'un fluide normal, nous savons que les forces de viscosité tendent à mettre tout le liquide en mouvement à partir de la surface du récipient : à l'équilibre, le liquide tourne comme un corps rigide.

Nous nous attendons, dans ce cas, à ce que $\langle \vec{j} \rangle = N\vec{A}$, la densité de courant total, dans le référentiel tournant, étant nulle.

Au contraire, dans un superfluide, nous prévoyons que seule une mince couche de liquide en contact avec le récipient sera en mouvement, assurant une continuité entre les parois et le gros du liquide qui restera immobile dans le repère absolu. Cette situation est très analogue à celle d'un supraconducteur dans un champ électromagnétique statique : l'induction magnétique décroît d'une valeur finie à la surface du spécimen à la valeur nulle à l'intérieur, sur une longueur caractéristique de pénétration. Cette analogie a été exploitée par Schafroth qui a montré qu'un système de bosons superfluide correspondait à un supraconducteur parfait si on attribuait une charge aux particules. Nous pouvons donc nous attendre à trouver un effet analogue à l'effet Meissner se traduisant par les mêmes caractéristiques pour la densité de courant induite.

Il y a cependant une limite physique à l'analogie entre la superfluidité et la supraconductivité : Feynman a en effet prévu l'existence de lignes de tourbillons dans l'état fondamental de ^4He liquide en rotation. D'après Pitævskii (11), ces lignes de tourbillons résultent d'une « structure » de la phase condensée, que nous avons automatiquement négligée en remplaçant a_0 et a_0^* par des nombres. Le schéma décrit précédemment ne peut représenter la situation physique que si $\vec{\omega}$ est assez faible et le diamètre du récipient assez petit, pour que la rotation ne puisse exciter aucune ligne de tourbillon.

L'interprétation physique que nous venons de proposer est donc sujette à caution. Nous l'avons néanmoins détaillée pour dégager le sens physique des fonctions de corrélation du courant que nous allons

maintenant définir et que nous étudierons d'un point de vue purement mathématique.

Cherchons donc la réponse à une composante de Fourier de $\vec{A}$:

$$H_1 = -m \vec{j}_{-k} \cdot \vec{A}_k e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (5.12)$$

Le même raisonnement que précédemment conduit aux résultats :

$$\langle \rho_k \rangle(\omega) = -m \sum_i F_{4i}(k, \omega) A_{ki}$$

$$\langle j_{ki} \rangle(\omega) = -m \sum_j F_{ij}(k, \omega) A_{kj}$$

où :

$$iF_{4i}(k, t-t') = \langle \psi_0 | T \{ \rho_k(t) j_{-ki}(t') \} | \psi_0 \rangle, \quad (5.13)$$

$$iF_{ij}(k, t-t') = \langle \psi_0 | T \{ j_{ki}(t) j_{-kj}(t') \} | \psi_0 \rangle. \quad (5.14)$$

$F_{ij}(k, \omega)$ donne la réponse pour l'observable $\vec{p}_i$. La fluctuation de la densité de courant total est donc :

$$\langle j_{ki}^{\text{tot}} \rangle(\omega) = -m \sum_j K_{ij}(k, \omega) A_{kj}$$

où :

$$K_{ij}(k, \omega) = F_{ij}(k, \omega) + \frac{n}{m} \delta_{ij}. \quad (5.15)$$

Les réponses $\langle \rho_k \rangle$ et $\langle j_k \rangle$ à une excitation extérieure doivent assurer la conservation de la masse :

$$\text{div} \langle \vec{j} \rangle + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} = 0$$

qui s'écrit :

$$\sum_i k_i \langle j_{ki} \rangle = \omega \langle \rho_k \rangle.$$

On en déduit que les fonctions de corrélation doivent satisfaire les relations :

$$\begin{aligned} \sum_i k_i F_{4i}(k, \omega) &= \omega F_{44}(k, \omega), \\ \sum_i k_i K_{ij}(k, \omega) &= \omega F_{4j}(k, \omega). \end{aligned} \quad (5.16)$$

2. — Développement des fonctions de corrélation

Nous commençons par écrire les fonctions $F_{\mu\nu}$ dans le formalisme de seconde quantification. L'opérateur densité de particules est :

$$\rho(\vec{r}) = \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

L'opérateur fluctuation de densité, défini par :

$$\rho_k = \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r},$$

s'écrit :

$$\rho_k = \sum_q a_{q-\frac{k}{2}}^* a_{q+\frac{k}{2}}. \quad (5.17)$$

L'opérateur densité de courant est :

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{i}{2im} [\psi^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) - \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})],$$

d'où :

$$\vec{j}_k = \sum_q \frac{q}{m} a_{q-\frac{k}{2}}^* a_{q+\frac{k}{2}}. \quad (5.18)$$

Reportant ces expressions dans $F_{\mu\nu}(k, t-t')$ et utilisant (5.1), on vérifie que :

$$iF_{\mu\nu}(k, t-t') = \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \lambda_{\mu}(\vec{q}) \lambda_{\nu}(\vec{q}') K(\vec{q}, \vec{q}', \vec{k}, t-t') \quad (5.19)$$

où :

$$\lambda_{\mu}(\vec{q}) = \begin{cases} q_i/m & \text{si } \mu = i \\ 1 & \text{si } \mu = 4. \end{cases}$$

(5.19) est la relation que nous cherchions entre les fonctions de corrélation et la fonction de Green à deux particules. On constate immédiatement la propriété de symétrie :

$$F_{\mu\nu}(\vec{k}, t) = F_{\nu\mu}(-\vec{k}, -t) \quad (5.20)$$

(pour simplifier l'écriture, nous choisissons $t' = 0$).

Suivant la méthode générale que nous avons développée dans les chapitres précédents, nous commençons par éliminer les opérateurs a_0 et a_0^* . Ceci conduit à trois contributions distinctes de $F_{\mu\nu}$ que nous notons :

$$F_{\mu\nu}^a, F_{\mu\nu}^b, F_{\mu\nu}^c.$$

$$\begin{aligned} a) \quad iF_{\mu\nu}^a(k, t) &= n_0 \langle \psi_0 | T \left\{ \left[\lambda_{\mu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) a_k(t) + \lambda_{\mu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) a_{-k}^*(t) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\lambda_{\nu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) a_k^*(0) + \lambda_{\nu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) a_{-k}(0) \right] \right\} | \psi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Ce terme se développe immédiatement suivant (cf. (3.13) et (3.20)) :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(k, t) &= n_0 \left\{ \lambda_{\mu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) \lambda_{\nu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) G(\vec{k}, t) + \lambda_{\mu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) \lambda_{\nu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) \widehat{G}(\vec{k}, t) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\mu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) \lambda_{\nu} \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) \widetilde{G}(\vec{k}, t) + \lambda_{\mu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) \lambda_{\nu} \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) G(-\vec{k}, -t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad iF_{\mu\nu}^b(k, t) = n_0^{1/2} \sum_q' \langle \psi_0 | T \left\{ \left[\lambda_\mu \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) a_k(t) + \lambda_\mu \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) a_{-k}^*(t) \right] \times \lambda_\nu(\vec{q}) a_{q+\frac{k}{2}}^*(0) a_{q-\frac{k}{2}}(0) \right\} | \psi_0 \rangle \\
 + n_0^{1/2} \sum_q' \langle \psi_0 | T \left\{ \lambda_\mu(\vec{q}) a_{q-\frac{k}{2}}^*(t) a_{q+\frac{k}{2}}(t) \times \left[\lambda_\nu \left(\frac{\vec{k}}{2} \right) a_k^*(0) + \lambda_\nu \left(-\frac{\vec{k}}{2} \right) a_{-k}(0) \right] \right\} | \psi_0 \rangle. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

$$c) \quad iF_{\mu\nu}^c(k, t) = \sum_{q, q'}' \lambda_\mu(\vec{q}) \lambda_\nu(\vec{q}') \langle \psi_0 | T \left\{ a_{q-\frac{k}{2}}^*(t) a_{q+\frac{k}{2}}(t) a_{q'+\frac{k}{2}}^*(0) a_{q'-\frac{k}{2}}(0) \right\} | \psi_0 \rangle. \quad (5.23)$$

3. — Représentation diagrammatique : notation matricielle

Nous voulons maintenant écrire les diagrammes correspondant aux $F_{\mu\nu}$. Nous procédons comme pour G : nous exprimons ces fonctions en représentation d'interaction, puis nous appliquons le théorème de Wick et nous représentons les différents T produits suivant la méthode de Feynman. Pour simplifier l'écriture, nous regroupons les propagateurs nus et leurs noyaux

de self-énergie en propagateurs renormalisés. Nous obtenons alors des diagrammes « squelettes » dont les lignes internes sont débarrassées de tous les noyaux de self-énergie. Les lignes internes seront, soit du type G , soit du type $\widehat{G}$, ce dernier provenant de la non-conservation du nombre de particules. Pour tracer les diagrammes, nous sommes alors conduits à adopter la convention suivante : à chaque opérateur a_k , nous associerons une demi-ligne fléchée $\xrightarrow{k}$, de même a_k

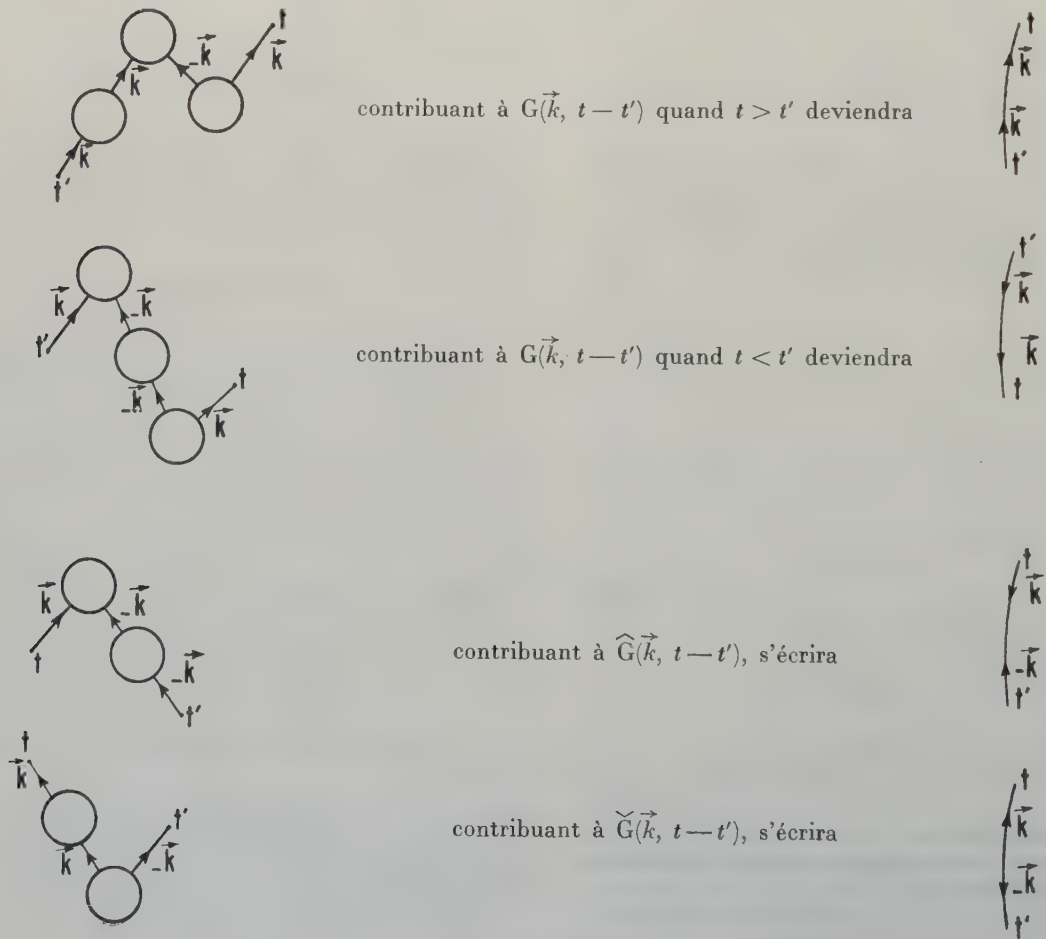


FIG. 21.

sera représenté par $\bullet \text{---} \overleftarrow{k}$. Une contraction quelconque de deux opérateurs aux temps t et t' sera représentée par un segment joignant les deux points t et t' et muni de deux flèches indiquant la nature des opérateurs contractés. La figure ci-contre résume cette règle et montre la correspondance entre les nouveaux diagrammes et les précédents.

Pour pouvoir écrire la contribution des diagrammes, nous devons convenir d'une notation permettant de repérer les différents propagateurs. A cet effet, nous posons :

$$iG^{\alpha\beta}(k, t - t') = \langle \psi_0 | T \left\{ a_{-\beta k}^{\beta}(t) a_{\alpha k}^{\alpha}(t') \right\} | \psi_0 \rangle \quad (5.24)$$

où :

$$\alpha = \begin{cases} + & \text{s'il réfère à un opérateur création,} \\ - & \text{s'il réfère à un opérateur destruction.} \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que :

$$G^{+-}(k, t - t') = G(k, t - t'); \quad G^{-+}(k, t - t') = G(-k, t' - t); \\ G^{++}(k, t - t') = \tilde{G}(k, t - t'); \quad G^{--}(k, t - t') = \hat{G}(k, t - t').$$

Si $G(k, \omega)$ est la transformée de Fourier de $G(k, t - t')$,

$$G^{+-}(k, \omega) = G(k, \omega); \quad G^{-+}(k, \omega) = G(-k, -\omega); \\ \text{et de même} \quad (5.25)$$

$$G^{++}(k, \omega) = G^{--}(k, \omega) = \hat{G}(k, \omega).$$

Reportons-nous aux équations (3.21) exprimant les propagateurs en fonction des noyaux de self-énergie. Nous pouvons récrire ces équations sous la forme matricielle suivante :

$$G^{\alpha\beta}(k, \omega) = G_0^{\alpha\beta}(k, \omega) + \sum_{\xi\epsilon} G_0^{\alpha\xi}(k, \omega) M^{\xi\epsilon}(k, \omega) G^{\epsilon\beta}(k, \omega) \quad (5.26)$$

opposée à celle de G , ce qui est nécessaire pour donner à (5.26) une forme simple. (5.26) n'est autre que le développement de l'équation matricielle :

$$G = G_0 + G_0 M G \quad (5.28)$$

où :

$$G = \begin{pmatrix} \tilde{G}(k, \omega) & G(k, \omega) \\ G(-k, -\omega) & \hat{G}(k, \omega) \end{pmatrix}; \quad G_0 = \begin{pmatrix} 0 & G_0(k, \omega) \\ G_0(-k, -\omega) & 0 \end{pmatrix}; \\ M = \begin{pmatrix} M_2(k, \omega) & M_1(-k, -\omega) \\ M_1(k, \omega) & M_2(k, \omega) \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions les propriétés de symétrie :

$$G^{\alpha\beta}(\varpi) = G^{\beta\alpha}(-\varpi) = G^{-\alpha-\beta}(-\varpi), \quad (5.29) \\ M^{\alpha\beta}(\varpi) = M^{\beta\alpha}(-\varpi) = M^{-\alpha-\beta}(-\varpi),$$

où $\varpi = (\vec{k}, \omega)$.

4. — Représentation diagrammatique des fonctions de corrélation

Définissons la transformée de Fourier :

$$F_{\mu\nu}(k, \omega) = F_{\mu\nu}(\varpi)$$

par :

$$F_{\mu\nu}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mu\nu}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Si nous appliquons les règles générales de calcul des diagrammes de Feynman développées au chapitre III, ainsi que la nouvelle représentation des propagateurs renormalisés que nous venons de définir, nous pouvons représenter les diverses contributions de $F_{\mu\nu}(\varpi)$ sous la forme des diagrammes « squelettes » suivants : $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$ défini par (5.22) sera représenté par les quatre diagrammes :

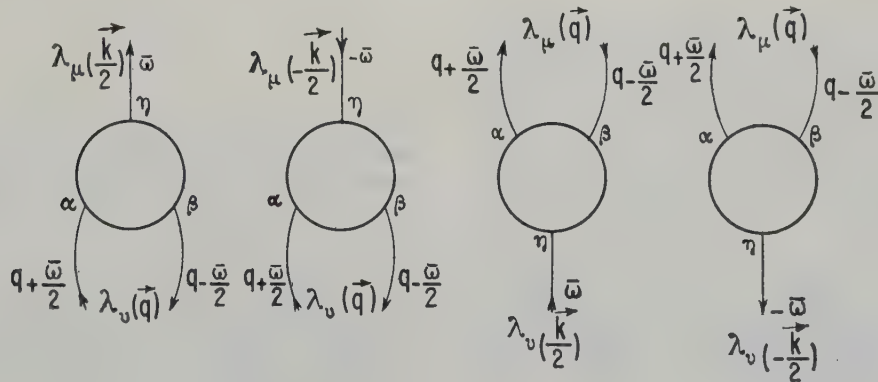


FIG. 22.

où nous avons défini :

$$M^{-+}(k, \omega) = M_1(k, \omega); \quad M^{+-}(k, \omega) = M_1(-k, -\omega); \\ M^{++}(k, \omega) = M^{--}(k, \omega) = M_2(k, \omega). \quad (5.27)$$

Remarquons que la convention des indices de M est

où le symbole q représente le quadri-moment $(\vec{q}, q^0)$. Nous voyons apparaître un noyau d'interaction à trois particules que nous noterons :

$$P_{\alpha\beta}^{\eta}(q; \varpi).$$

Comme nous travaillons sur des diagrammes squelettes, $P_{\alpha\beta}^{\eta}(q; \varpi)$ ne peut avoir d'insertion diagonale du type représenté sur la figure ci-dessous :



FIG. 23.

car cette insertion est déjà comptée dans le propagateur renormalisé $G(\varpi)$ qui complète la contribution $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$.

Avec les conventions précédentes, le noyau $P^{-+}(q; \varpi)$ correspond à :

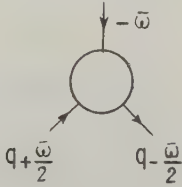


FIG. 24.

et le premier diagramme de $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$ s'écrit :

$$n_0^{1/2} \lambda_{\mu} \left(\frac{k}{2} \right) \sum_{\substack{\alpha\beta\eta \\ q}} G^{\eta-}(\varpi) P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; \varpi) \\ \times G^{+\alpha} \left(q + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\beta-} \left(q - \frac{\varpi}{2} \right) \lambda_{\nu}(q).$$

Nous n'explicitons pas les contributions des trois autres diagrammes qui sont analogues.

De même, $F_{\mu\nu}^c(\varpi)$, défini par (5.23), sera représenté par les quatre diagrammes :

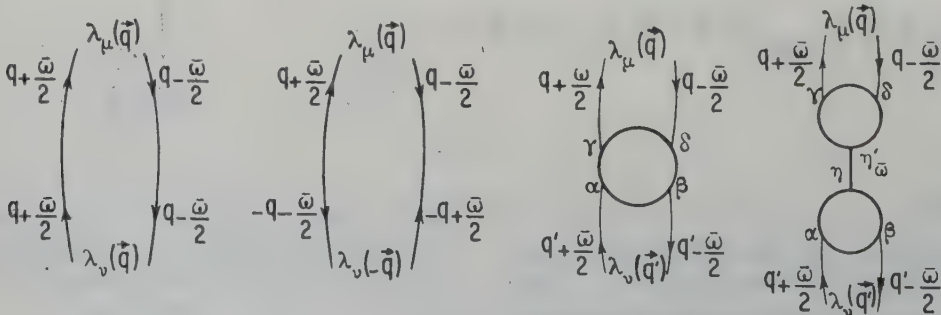


FIG. 25.

Le dernier diagramme fait intervenir deux noyaux du type P et un propagateur $G^{\eta'}(\varpi)$. Sa contribution se rattache aux contributions $F_{\mu\nu}^a(\varpi)$ et $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$: nous la noterons $F_{\mu\nu}^i(\varpi)$. Les trois premiers diagrammes ont une contribution que nous noterons $F_{\mu\nu}^r(\varpi)$, qui est toute différente, car elle ne contient pas de facteur $G(\varpi)$ à l'opposé des contributions précédentes.

Notons que le noyau d'interaction Γ que l'on trouve dans le troisième diagramme de $F_{\mu\nu}^c$ ne peut être séparé en deux noyaux de type P par un propagateur $G(\varpi)$, cette possibilité étant déjà prise en considération dans le dernier diagramme. Les 16 termes de $F_{\mu\nu}^c(\varpi)$ faisant intervenir Γ s'écrivent :

$$\sum_{\substack{\alpha\beta \\ \gamma\delta \\ qq'}} \lambda_{\mu}(\vec{q}) \lambda_{\nu}(\vec{q}') G^{+\alpha} \left(q' + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\beta-} \left(q' - \frac{\varpi}{2} \right) \\ \times \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(q', q; \varpi) G^{\gamma-} \left(q + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\delta+} \left(q - \frac{\varpi}{2} \right)$$

où par exemple $\Gamma^{+-}(q', q; \varpi)$ correspond à :

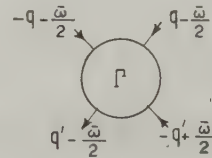


FIG. 26.

Les propriétés essentielles des fonctions de corrélation sont contenues dans les noyaux P et Γ à l'étude desquels nous consacrons le chapitre suivant.

VI. — ÉTUDE DES NOYAUX D'INTERACTION

Dans ce chapitre nous allons rechercher les propriétés des noyaux Γ et P introduits dans le chapitre précédent. Nous commençons par étudier leurs symétries par rapport aux indices : les contributions des

16 diagrammes $\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ ne sont pas toutes différentes, et nous trouvons en fait trois cas principaux de symétrie :

1° L'échange des indices α et β ou γ et δ revient à changer q' en $-q'$ ou q en $-q$:

$$\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi) = \Gamma^{\gamma\delta}_{\beta\alpha}(-q', q; \varpi) = \Gamma^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}(q', -q; \varpi).$$

2° L'échange des couples d'indices $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ se traduit par le changement $q \leftrightarrow -q'$ et de ϖ en $-\varpi$:

$$\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi) = \Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(-q, -q'; -\varpi).$$

Exemple :

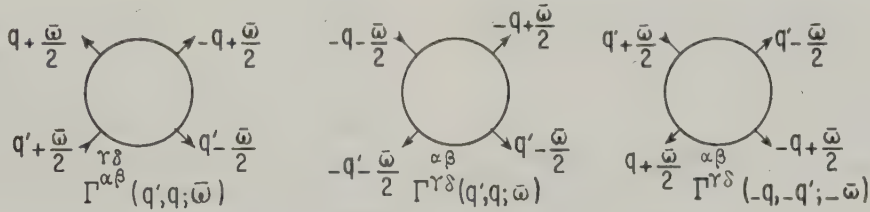


FIG. 27.

On vérifie immédiatement que le premier et le troisième diagrammes sont identiques.

3° Considérons un diagramme contribuant à :

$$\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi).$$

Invertissons le sens de toutes les flèches : la contribution du diagramme est invariante. Le nouveau diagramme obtenu contribue visiblement à $\Gamma^{-\gamma-\delta}_{-\alpha-\beta}(-q', -q; -\varpi)$. Donc :

$$\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi) = \Gamma^{-\gamma-\delta}_{-\alpha-\beta}(-q', -q; -\varpi).$$

4° Ces propriétés s'étendent aux opérateurs P et s'écrivent :

$$P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; \varpi) = P^{\eta}_{\beta\alpha}(-q; \varpi) = P^{-\eta}_{-\alpha-\beta}(-q; -\varpi).$$

Après ces considérations préliminaires, nous passons à l'étude de propriétés plus fondamentales des noyaux d'interaction. Notre discussion sera guidée par les résultats obtenus dans l'étude des systèmes de fermions,

normaux et superfluides, au zéro absolu (dont on peut trouver un développement très détaillé dans P. Nozières, *op. cit.*, chap. VI et VII).

1. — Diffusion multiple de deux excitations élémentaires

a) **Equations générales. Comparaison avec les fermions.** — Dans l'étude des systèmes de fermions, on constate des singularités de l'opérateur d'interaction, équivalent de notre noyau $\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi)$. Ces singularités apparaissent lorsqu'on passe à la limite $\varpi = 0$ et elles sont liées à la diffusion multiple des deux excitations.

Dans le langage des diagrammes, nous dirons qu'il y a un processus de diffusion de deux excitations si

l'on trouve deux régions d'un diagramme squelette contribuant à Γ , séparées uniquement par deux propagateurs. On peut alors décomposer tout noyau Γ en un certain nombre de noyaux d'interaction « irréductibles », séparés par des paires de propagateurs. Soit I la contribution de ces parties irréductibles (par rapport à la diffusion des deux excitations). Le noyau Γ le plus général sera obtenu en itérant les deux processus interaction et diffusion, soit :

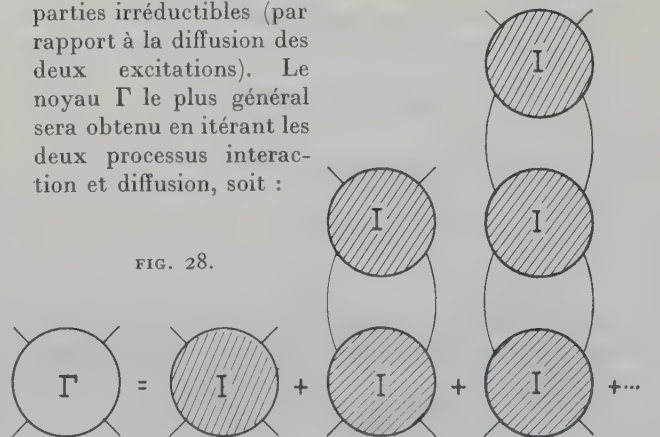


FIG. 28.

(Rappelons que les propagateurs intermédiaires sont renormalisés). Le développement que nous venons de représenter n'est rien d'autre que la solution par itérations de l'équation intégrale de Bethe-Salpeter suivante :

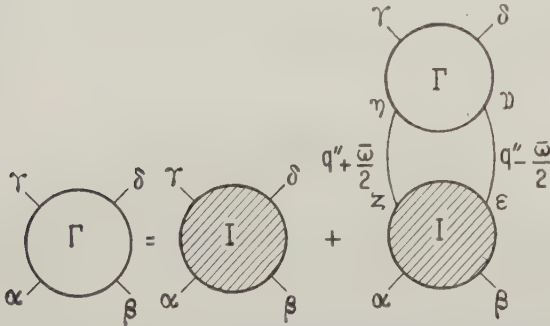


FIG. 29.

Cette équation constitue le point de départ de notre étude des noyaux d'interaction. Le nombre de particules n'étant pas conservé dans un liquide de Bose, nous devons tenir compte de toutes les combinaisons de propagateurs séparant les noyaux I et Γ. L'équation de Bethe-Salpeter prend alors la forme :

$$\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi) = I^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q', q; \varpi) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta\epsilon \\ \eta\nu \\ q''}} I^{\zeta\epsilon}_{\alpha\beta}(q', q''; \varpi) G^{\zeta\eta}\left(q'' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\nu\epsilon}\left(q'' - \frac{\varpi}{2}\right) \Gamma^{\gamma\delta}_{\eta\nu}(q'', q; \varpi). \quad (6.1)$$

(Notons que, pour compenser les facteurs i introduits avec les propagateurs G , nous avons choisi $\Gamma = -\Gamma'$ où Γ' est la contribution exacte obtenue avec les règles de calcul des diagrammes établies au chapitre III.

Nous choisirons de même $P = -P'$). Le facteur $\frac{1}{2}$ résulte de l'invariance du diagramme dans la transformation

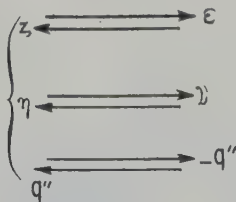


FIG. 30.

Ceci apparaît clairement si l'on écrit le produit des deux facteurs G contenus dans (6.1) sous la forme :

$$G^{\zeta\eta}\left(q'' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\nu\epsilon}\left(-q'' + \frac{\varpi}{2}\right).$$

Des équations analogues s'établissent dans le cas des fermions. Leurs solutions ont des singularités à la limite $\varpi \rightarrow 0$, dont la nature dépend du système de fermions considéré :

1° Système de fermions normaux. — Dans ce cas, le nombre de particules est conservé : l'équation de Bethe-Salpeter n'est plus matricielle. L'interaction la plus intéressante est celle d'un quasi-trou et d'une quasi-particule, dont le noyau est solution de l'équation :

$$\Gamma(q, q'; \varpi) = I(q, q'; \varpi) + \sum_{q''} I(q, q''; \varpi) G\left(q'' - \frac{\varpi}{2}\right) G\left(q'' + \frac{\varpi}{2}\right) \Gamma(q'', q'; \varpi).$$

La décomposition spectrale des fonctions de Green montre que, pour chaque k , il n'existe qu'un seul pôle de $G(k, \omega)$, situé au-dessus de l'axe réel si k est à l'intérieur de la sphère de Fermi, ou au-dessous de l'axe réel si $k > k_F$. On voit immédiatement apparaître une singularité du noyau de l'équation de Bethe-Salpeter quand on passe à la limite $\varpi = 0$: en effet, si q'' se trouve sur la surface de Fermi, les deux pôles du produit GG se rapprochent tout en restant de part et d'autre de l'axe réel. Un calcul détaillé, dû à Landau, montre que la limite du produit GG lorsque $\varpi \rightarrow 0$ dépend de la valeur du rapport $\frac{\omega}{k}$. Cette singularité rejaillit sur Γ . Elle a une importance physique essentielle, car elle détermine toutes les propriétés du système aux faibles valeurs de k et ω .

2° Système de fermions superfluides. — Considérons par exemple un supra-conducteur. Le spectre des quasi-particules possède un gap fini. Les pôles de GG situés de part et d'autre de l'axe réel ne peuvent jamais se rencontrer. La limite du produit GG lorsque $\varpi \rightarrow 0$ est donc régulière. Par contre, c'est l'équation intégrale de Bethe-Salpeter elle-même qui est singulière lorsque $\varpi \rightarrow 0$, car l'équation homogène associée possède une solution non nulle pour $\varpi \equiv 0$. Cette solution de l'équation homogène détermine le gap. Nous reviendrons sur ce point dans la suite du chapitre.

Nous sommes ainsi amenés à rechercher si l'une ou l'autre des singularités présentes dans un système de Fermi existe dans le cas du liquide de Bose. Cette étude est essentielle pour pouvoir passer à la limite $\varpi \rightarrow 0$.

b) Discussion de la limite $\varpi \rightarrow 0$. — Considérons d'abord la limite du produit GG . Nous voyons apparaître dans l'équation (6.1) toutes les combinaisons possibles du produit de deux propagateurs G ou $\hat{G}$. Ces propagateurs ont une représentation spectrale du type (4.18) : ils ont des pôles symétriques par rapport

à l'origine, situés de part et d'autre de l'axe réel. Si $\varpi \rightarrow 0$, les quatre pôles du produit de deux propagateurs vont se transformer en deux pôles doubles, toujours symétriques par rapport à l'origine. Dans la mesure où ces deux pôles doubles restent distincts, la limite pour $\varpi \rightarrow 0$ est parfaitement régulière. Il n'apparaîtra donc de singularité que lorsque q'' tendra vers zéro en même temps que ϖ .

Nous pouvons préciser cette discussion en utilisant les résultats du chapitre IV. Nous avons vu que :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} G(k, \varpi) &= - \lim_{k \rightarrow 0} \widehat{G}(k, \varpi) \\ &= z_k \left(\frac{1}{\omega - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{1}{\omega + \varepsilon_k - i\delta} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pour mettre qualitativement en évidence les singularités du produit GG, supposons que les fonctions I et Γ intervenant dans l'intégrale de l'équation (6.1) sont constantes dans la région ($\varpi \rightarrow 0$, $q'' \rightarrow 0$). Il suffit alors d'étudier le comportement de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \lim_{\varpi \rightarrow 0} \sum_q G^{\zeta\eta} \left(q + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\nu\epsilon} \left(q - \frac{\varpi}{2} \right) \\ = \lim_{\varpi \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int d\vec{q} d\vec{q}^0 G^{\zeta\eta} \left(q + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\nu\epsilon} \left(q - \frac{\varpi}{2} \right). \end{aligned}$$

Nous nous intéressons seulement au voisinage de $\vec{q} = 0$. On peut alors remplacer les facteurs G par leur forme limite (6.2), et effectuer l'intégration sur q^0 . L'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \lim_{\varpi \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} z_{q+\frac{k}{2}} z_{q-\frac{k}{2}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{q+\frac{k}{2}} + \varepsilon_{q-\frac{k}{2}} - \omega - i\delta} \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon_{q+\frac{k}{2}} + \varepsilon_{q-\frac{k}{2}} + \omega - i\delta} \right\} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} \frac{z_q^2}{\varepsilon_q}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

La limite de z_q quand $q \rightarrow 0$ est donnée par l'expression (4.19). L'intégrand de (6.3) est d'ordre q^2/ε_q^3 , avec $\varepsilon_q = cq$: il apparaît donc une *divergence logarithmique*.

Etudions la répercussion que cette divergence peut avoir sur la solution de l'équation (6.1). Le noyau irréductible $I(q', q''; \varpi)$ ne contient pas, par définition, de paires de propagateurs du type que nous venons d'étudier; il n'y a alors aucune raison pour que le paramètre ϖ joue un rôle essentiel : I a vraisemblablement un comportement régulier dans le domaine des singularités précédentes. Pour qu'il existe une solution de l'équation (6.1), il faut que la matrice Γ soit telle que la combinaison de ses éléments élimine la divergence introduite par les produits de deux propagateurs. L'existence d'une telle solution ne fait guère de doute. Par contre, la possibilité d'une limite de Γ dépendant du rapport $\frac{ck}{\omega}$ n'est pas exclue.

En réalité, l'intégrale (6.3) n'est divergente que lorsque $k = \omega = 0$. Un calcul plus détaillé montre qu'aux faibles valeurs de k et ω , cette intégrale est de la forme :

$$\text{Log} |c^2 k^2 - \omega^2| f(k, \omega),$$

où $f(k, \omega)$ est une fonction de k et ω développable en série entière. Il semble donc que Γ ne soit pas une fonction analytique de k et ω . Ceci soulève de graves difficultés. En effet, il devient peu vraisemblable que l'on puisse développer les divers opérateurs Γ , P, M, etc., en puissances de k et ω . De plus, il se peut que la limite de ces opérateurs, lorsque $k, \omega \rightarrow 0$, dépende de

la valeur du rapport $\frac{k}{\omega}$. Cette singularité logarithmique met donc en cause toute l'analyse faite au chapitre IV.

Cette difficulté n'est pas nouvelle. Elle est sous-jacente dans les travaux de Beliaev et d'Hugenholtz-Pines. Nous verrons dans la section 3 qu'elle ne relève pas d'une maladresse mathématique, mais qu'elle a une origine physique, liée à la distribution spectrale des paires de quasi-particules.

Le deuxième type de singularité, apparaissant dans le cas des supra-conducteurs, est lié à l'existence d'une solution de l'équation intégrale homogène déduite de (6.1). Dans un supra-conducteur, cette équation homogène détermine le gap et a pour solution M_2 . Nous verrons dans la section 3 que la transposition de cette relation au cas des bosons conduit à une équation intégrale *inhomogène*, qui par conséquent n'introduit aucune singularité. Nous ne pensons pas qu'il puisse exister d'autre solution de l'équation de Bethe-Salpeter homogène. Nous avons vérifié cette assertion sur le modèle particulièrement simple où I est séparable.

c) **Élimination de la diffusion multiple des autres noyaux d'interaction.** — Pour les noyaux de type P, nous pouvons effectuer la même décomposition qui nous avait conduits à l'équation (6.1) pour Γ . Appelant J la contribution du noyau d'interaction irréductible par rapport à la diffusion de deux excitations, nous obtenons l'équation de Bethe-Salpeter suivante :

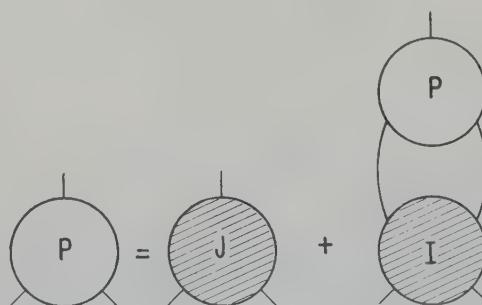


FIG. 31.

qui s'écrit :

$$P^{\alpha\beta}(q'; \varpi) = J^{\alpha\beta}(q'; \varpi) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q''}} \Gamma^{\gamma\delta}(q', q''; \varpi) G^{\gamma\zeta}\left(q'' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q'' - \frac{\varpi}{2}\right) P^{\zeta\epsilon}(q''; \varpi). \quad (6.4)$$

Cette décomposition n'est pas unique ; on peut en effet tout aussi bien écrire :

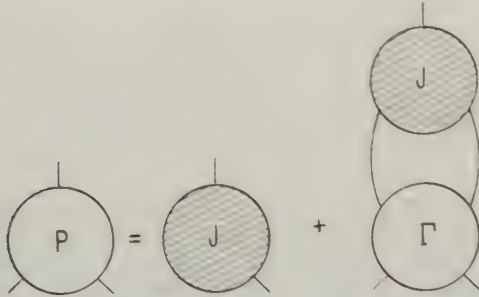


FIG. 32.

soit :

$$P^{\alpha\beta}(q'; \varpi) = J^{\alpha\beta}(q'; \varpi) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q''}} \Gamma^{\gamma\delta}(q', q''; \varpi) G^{\gamma\zeta}\left(q'' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q'' - \frac{\varpi}{2}\right) J^{\zeta\epsilon}(q''; \varpi). \quad (6.5)$$

Dans le langage de la théorie des équations intégrales linéaires de Fredholm, les équations (6.1), (6.4) et (6.5) ont l'interprétation très simple suivante : (6.5) est la solution de (6.4) obtenue en utilisant le noyau résolvant défini par (6.1).

Enfin, les noyaux de self-énergie eux-mêmes sont justiciables d'une décomposition analogue

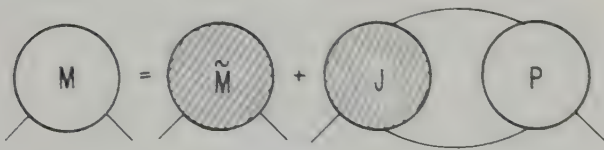


FIG. 33.

qui s'écrit :

$$M^{\alpha\beta}(\varpi) = \tilde{M}^{\alpha\beta}(\varpi) + \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q}} J^{\gamma\delta}\left(-q; -\varpi\right) G^{\gamma\zeta}\left(q + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q - \frac{\varpi}{2}\right) P^{\zeta\epsilon}(q; \varpi). \quad (6.6)$$

Notons que les noyaux M ne peuvent pas se décomposer suivant un schéma du type



FIG. 34.

car M' serait alors une insertion diagonale, ce qui est impossible puisque nous travaillons avec des diagrammes squelettes.

De nouveau, les développements (6.5) et (6.6) font intervenir l'intégrale d'un produit GG. Les opérateurs $M(\varpi)$ et $P(q; \varpi)$ contiennent donc la même singularité logarithmique que nous avons notée pour Γ . Cette singularité, se traduisant par des termes $\text{Log} |c^2 k^2 - \omega^2|$, réagit sur la limite de M et P et de leurs dérivées. Malgré l'importance de cette question, nous repousserons son étude à la section 3 de ce chapitre. Nous consacrons la section suivante à l'étude de la limite P lorsque $\varpi \rightarrow 0$, par une généralisation évidente des méthodes étudiées au chapitre IV : nous ignorons pour l'instant délibérément les difficultés soulevées par la divergence logarithmique de l'équation de Bethe-Salpeter.

2. — Calcul des noyaux d'interaction $P(q; \varpi)$ aux petites valeurs de ϖ

Le calcul des noyaux P part de la remarque suivante :

la limite de la contribution d'un diagramme $P^{\alpha\beta}(q; \varpi)$ quand $\varpi = 0$ est, à un facteur numérique près, la contribution d'un diagramme $M^{\alpha\beta}(q)$. Nous allons donc pouvoir appliquer au calcul de P la même analyse qui, au chapitre IV, nous a permis de relier M aux dérivées de E'_0 . Ici nous exprimerons le développement de $P(q; \varpi)$ pour ϖ petit en fonction des dérivées de $M(q)$. Nous travaillerons de nouveau avec les diagrammes non squelettes. Tout diagramme contribuant à P peut s'obtenir à partir d'un diagramme contribuant à M en attribuant le quadrimoment ϖ à une ligne de vide du diagramme M : l'analogie avec la construction des diagrammes M à partir des diagrammes E'_0 est complète.

Calcul de $P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; 0)$. — Deux cas se présentent :

a) $\alpha \neq \beta$. La limite d'un diagramme P est un diagramme M_1 . Considérons donc un diagramme M_1 d'ordre s en n_0 : on peut fabriquer s diagrammes différents $P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; \varpi)$ en attribuant le quadrimoment $+\varpi$ à une ligne de vide sortante ou $-\varpi$ à une ligne de vide entrante suivant le signe de η .

Donc :

$$P^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}(q; 0) = P^{\alpha\beta}(q; 0) = \frac{i}{n_0^{1/2}} s M^{\alpha\beta}(q), \quad (6.7)$$

qui se généralise suivant :

$$P^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}(q; 0) = P^{\alpha\beta}(q; 0) = i n_0^{1/2} \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (6.8)$$

b) $\alpha = \beta$. La limite d'un diagramme P est un diagramme M_2 . Nous devons alors tenir compte du signe relatif de α et η : en effet, si les deux lignes q sont entrantes, il y a $s - 1$ lignes de vide entrantes et $s + 1$ lignes de vide sortantes. On a par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} P^{\alpha}_{\alpha\beta}(q; 0) &= \frac{i}{n_0^{1/2}} (s - 1) M^{\alpha\beta}(q); \\ P^{\alpha}_{\alpha\beta}(q; 0) &= \frac{i}{n_0^{1/2}} (s + 1) M^{\alpha\beta}(q). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

On peut regrouper les résultats (6.8) et (6.9) sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\eta} P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; 0) &= 2i n_0^{1/2} \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0}; \\ P^{\alpha}_{\alpha\beta}(q; 0) - P^{\alpha}_{\alpha\beta}(q; 0) &= \frac{2i}{n_0^{1/2}} M^{\alpha\beta}(q) \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Ces expressions sont la transposition des relations (4.3) à (4.6). Nous allons maintenant étudier le terme du premier ordre du développement de $P(q; \varpi)$ au voisinage de $\varpi = 0$. Nous utilisons la représentation définie dans la section IV,2. Les lignes de vide sont reliées entre elles par des « chemins » tels qu'il n'existe qu'un seul trajet conduisant d'une ligne de vide à une autre. Seuls ces chemins sont représentés dans les diagrammes. Nous devons de nouveau distinguer deux cas suivant le signe relatif de α et β .

a) La limite $P^{\eta}_{\alpha\beta}(q; 0)$ est un diagramme $M_1(q)$ que nous schématisons sur la figure ci-dessous :



FIG. 35.

ce diagramme contient $2s$ lignes de vide.

Nous allons étudier successivement les variations de $M_1(q)$ quand le potentiel chimique varie, ou quand nous observons le système d'un référentiel en mouvement. La variation du potentiel chimique μ se traduit par l'attribution de l'énergie $\omega = \delta\mu$ à toutes les lignes de vide, ainsi qu'un accroissement correspondant de l'énergie des lignes q externes. La variation des lignes internes assure la conservation de l'énergie à tous les vertex représentés.

Pour étudier la variation de M_1 au premier ordre, nous devons distinguer entre les propagateurs situés sur le trajet reliant les deux lignes externes q et ceux qui sont en dehors de ce trajet.

1° Le propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ est en dehors du trajet reliant les deux lignes q externes. On peut le représenter schématiquement par

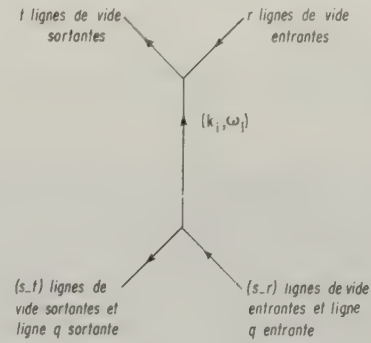


FIG. 36.

Pour assurer la conservation de l'énergie introduite par les lignes externes, il faut remplacer l'énergie du propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ par $[\omega_i + (t - r)\omega]$. La contribution du diagramme $M_1(q; \mu + \delta\mu)$ contient donc un facteur $G_0[k_i, \omega_i + (t - r)\omega]$.

Considérons maintenant les diagrammes $P^{++}(q; 0, \omega)$ que nous pouvons former à partir de $M_1(q)$. Ils ont la structure générale :

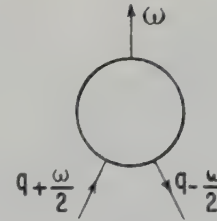


FIG. 37.

le propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ aura son énergie modifiée chaque fois qu'il se trouvera sur le trajet reliant la

ligne de vide sortante ω au trajet reliant les deux lignes externes q . On trouvera donc le facteur $G_0(k_i, \omega_i + \omega)$ dans t diagrammes $P^{++}(q; \omega)$.

Dans $M_1(q; \mu + \delta\mu)$ toutes les lignes de vide entrantes ou sortantes se sont vues attribuer l'énergie $+\omega$. Pour traiter les lignes de vide entrantes, nous travaillerons donc avec $P^{--}(q; -\omega)$ de structure générale :

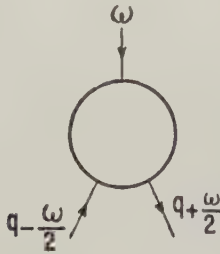


FIG. 38.

La même analyse que précédemment montre qu'on trouve le facteur $G_0(k_i, \omega_i - \omega)$ dans r diagrammes de $P^{--}(q; -\omega)$.

Au premier ordre en ω , nous pouvons réexprimer ces résultats de la façon suivante : si nous isolons la contribution du propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$, soit :

$$\omega \frac{\partial G_0(k_i, \omega_i)}{\partial \mu},$$

elle apparaît :

$$\left. \begin{array}{l} \text{dans } [M_1(q; \mu + \delta\mu) - M_1(q; \mu)] \\ \quad \text{avec le facteur } (t - r), \\ \text{dans } [P^{++}(q; \omega) - P^{++}(q; 0)] \text{ avec le facteur } t, \\ \text{dans } [P^{--}(q; -\omega) - P^{--}(q; 0)] \\ \quad \text{avec le facteur } (-r). \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

Le premier facteur est la somme des deux autres. Nous ne pouvons cependant pas conclure avant d'avoir traité le cas où :

2° Le propagateur $G_0(k_j, \omega_j)$ est sur le trajet reliant les deux lignes q externes. On peut le représenter schématiquement par

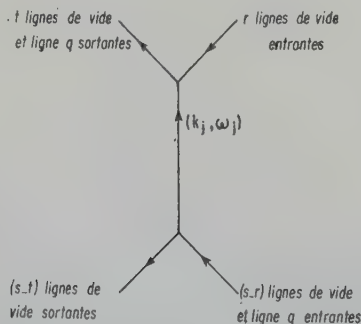


FIG. 39.

En ce qui concerne M_1 , la conservation de l'énergie introduite par les lignes externes impose de remplacer ω_j par :

$$[\omega_j + (t - r + 1)\omega].$$

La contribution de $M_1(q; \mu + \delta\mu)$ contient donc le facteur $G_0[k_j, \omega_j + (t - r + 1)\omega]$. L'analyse des diagrammes P est plus délicate que dans le cas précédent, car le propagateur considéré se trouve modifié dans tous les diagrammes.

Considérons d'abord $P^{++}(q; \omega)$. Dans t diagrammes, on trouve le facteur $G_0(k_j, \omega_j + \frac{\omega}{2})$ et dans $(s - t)$ le facteur $G_0(k_j, \omega_j - \frac{\omega}{2})$. De même, dans r diagrammes de $P^{--}(q; -\omega)$, on trouve le facteur $G_0(k_j, \omega_j - \frac{\omega}{2})$ et dans $(s - r)$ le facteur $G_0(k_j, \omega_j + \frac{\omega}{2})$.

Au total, au premier ordre, on trouve la contribution contenant le facteur $\omega \frac{\partial G_0(k_j, \omega_j)}{\partial \mu}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dans } [M_1(q; \mu + \delta\mu) - M_1(q; \mu)] \\ \quad \text{avec le facteur } (t - r + 1) \\ \text{dans } [P^{++}(q; \omega) - P^{++}(q; 0)] \\ \quad \text{avec le facteur } (t - \frac{s}{2}), \\ \text{dans } [P^{--}(q; -\omega) - P^{--}(q; 0)] \\ \quad \text{avec le facteur } (\frac{s}{2} - r). \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

Comparons ce résultat avec (6.11) : la somme des contributions des diagrammes P conduit au même facteur dans les deux cas. Par contre, il existe une différence entre les facteurs contenus dans :

$$[M_1(q; \mu + \delta\mu) - M_1(q; \mu)]$$

suivant que la ligne se trouve ou non sur le trajet reliant les deux lignes externes q . Nous devons donc, pour établir une relation entre P et $\omega \frac{\partial M}{\partial \mu}$, analogue de

l'équation (4.8) reliant M et $\omega \frac{\partial E'_0}{\partial \mu}$, compenser la variation excédentaire des propagateurs situés sur le trajet reliant les lignes externes q .

A cet effet, considérons $M_1(\vec{q}, q^0 + \delta q^0; \mu)$. Le diagramme correspondant sera obtenu, grâce à notre règle de représentation des diagrammes, en modifiant l'énergie des seuls propagateurs situés sur le chemin reliant les lignes externes q . Choissant $\delta q^0 = \omega$, ceci nous permet de réconcilier les résultats (6.11) et (6.12) sous la forme :

$$\omega \frac{\partial M_1(q)}{\partial \mu} = \frac{n_0^{1/2}}{i} [P^{++}(q; \omega) + P^{--}(q; -\omega) - P^{++}(q; 0) - P^{--}(q; 0)] + \omega \frac{\partial M_1(q)}{\partial q^0} \quad (6.13)$$

valable au premier ordre en ω . On peut de même étudier la variation d'un diagramme $M_1(-q; \mu + \delta\mu)$, correspondant aux noyaux P^{++} . Les résultats (6.11) et (6.12) se conservent. Pour éliminer la variation excédentaire des propagateurs situés sur le trajet reliant les lignes externes $(-q)$, il faudra ajouter la contribution :

$$M_1(\vec{q}, -q^0 + \omega; \mu) - M_1(\vec{q}, -q^0; \mu) = -\omega \frac{\partial M_1(-q)}{\partial q^0}.$$

On peut alors récrire (6.13) sous la forme plus générale suivante :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [P^{\alpha\beta}(q; \omega) + P^{\alpha\beta}(q; -\omega)] = 2in_0^{1/2} \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0} + \frac{i}{n_0^{1/2}} \omega \left\{ \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} + \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial q_0} [\delta(\alpha, +) - \delta(\alpha, -)] \right\}, \quad (6.14)$$

valable si $\alpha \neq \beta$, où on a utilisé (6.10).

b) La limite $P^{\alpha\beta}(q; 0)$ est un diagramme $M_2(q)$ que nous schématisons sur la figure ci-dessous.

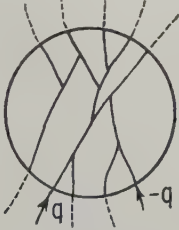


FIG. 40.

Ce diagramme contient $(s+1)$ lignes de vide sortantes et $(s-1)$ lignes de vide entrantes.

Nous allons répéter l'analyse précédente.

1° Le propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ est en dehors du trajet reliant les lignes q externes. On peut le représenter schématiquement par

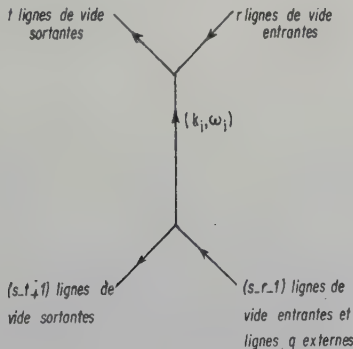


FIG. 41.

En ce qui concerne M_2 , la conservation de l'énergie introduite par les lignes externes impose de remplacer ω_i par $[\omega_i + (t-r)\omega]$.

Par ailleurs, la structure des diagrammes $P^{++}(q; \omega)$ est :

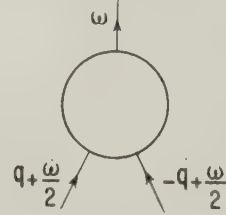


FIG. 42.

celle des diagrammes $P^{--}(q; -\omega)$ est :

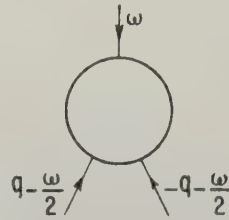


FIG. 43.

Si nous isolons la contribution contenant la variation du propagateur $G_0(k_i, \omega_i)$ au premier ordre en ω , elle apparaît :

$$\left. \begin{aligned} &\text{dans } [M_2(q; \mu + \delta\mu) - M_2(q; \mu)] \\ &\quad \text{avec le facteur } (t-r), \\ &\text{dans } [P^{++}(q; \omega) - P^{++}(q; 0)] \\ &\quad \text{avec le facteur } t, \\ &\text{dans } [P^{--}(q; -\omega) - P^{--}(q; 0)] \\ &\quad \text{avec le facteur } (-r) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

2° Le propagateur $G_0(k_j, \omega_j)$ est sur le trajet reliant les deux lignes q externes. On peut le représenter schématiquement par

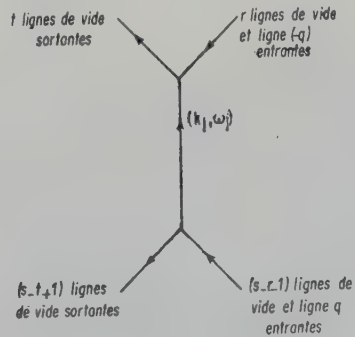


FIG. 44.

Considérons d'abord M_2 . La conservation de l'énergie introduite par les lignes externes impose de remplacer ω_j par $[\omega_j + (t - r - 1)\omega]$.

Si nous isolons la contribution contenant la variation du propagateur $G_0(k_j, \omega_j)$ au premier ordre en ω , elle apparaît :

$$\left. \begin{aligned} &\text{dans } [M_2(q; \mu + \delta\mu) - M_2(q; \mu)] \\ &\quad \text{avec le facteur } (t - r - 1), \\ &\text{dans } [P^{+-}(q; \omega) - P^{+-}(q; 0)] \\ &\quad \text{avec le facteur } \frac{1}{2} [t - (s - t + 1)], \\ &\text{dans } [P^{--}(q; -\omega) - P^{--}(q; 0)] \\ &\quad \text{avec le facteur } -\frac{1}{2} [r - (s - r - 1)] \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

La somme des deux derniers facteurs est égale au premier, dans (6.16) comme dans (6.15). On peut alors écrire :

$$\omega \frac{\partial M_2(q)}{\partial \mu} = \frac{n_0^{1/2}}{i} [P^{+-}(q; \omega) + P^{--}(q; -\omega) - P^{+-}(q; 0) - P^{--}(q; 0)] \quad (6.17)$$

valable au premier ordre en ω .

Nous regroupons les résultats (6.14) et (6.17) sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} [P^{\alpha\beta}(q; \omega) + P^{\alpha\beta}(q; -\omega)] \\ = 2in_0^{1/2} \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0} + \frac{i}{n_0^{1/2}} \omega \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} + \frac{i}{n_0^{1/2}} \omega \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial q_0} \\ \times \delta_{(\alpha, -\beta)} [\delta_{(\alpha, +)} - \delta_{(\alpha, -)}]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Calquant l'étude du chapitre IV, nous pouvons chercher la variation de M lorsqu'on observe le système d'un référentiel en mouvement de translation uniforme tel que le moment de chaque particule soit augmenté de $\vec{\delta q} = \vec{k}$. La variation au premier ordre sera notée $\vec{k} \cdot \frac{\delta M(q)}{\delta \vec{q}}$ (il ne faut pas confondre $\frac{\delta M(q)}{\delta \vec{q}}$ avec $\frac{\partial M(q)}{\partial \vec{q}}$ dérivée de l'opérateur de self-énergie par rapport à son moment).

Le calcul ne présente aucune difficulté nouvelle : nous devons tenir compte de la variation des vertex. Nous ne développerons pas, nous bornant à donner la règle permettant de transposer (6.18) à ce cas :

$$\omega \frac{\partial M}{\partial \mu} \text{ doit être remplacé par } \vec{k} \cdot \frac{\delta M}{\delta \vec{q}}$$

et :

$$\omega \frac{\partial M}{\partial q_0} \text{ par } \vec{k} \cdot \frac{\partial M}{\partial \vec{q}}.$$

On obtient alors le résultat général valable au premier ordre en $\varpi = (\vec{k}, \omega)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varpi \rightarrow 0} [P^{\alpha\beta}(q; \varpi) + P^{\alpha\beta}(q; -\varpi)] \\ = 2in_0^{1/2} \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0} + \frac{i}{n_0^{1/2}} \left[\omega \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} + \vec{k} \cdot \frac{\delta M^{\alpha\beta}(q)}{\delta \vec{q}} \right] \\ + \frac{i}{n_0^{1/2}} \left[\omega \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial q_0} + \vec{k} \cdot \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \vec{q}} \right] \delta_{(\alpha, -\beta)} [\delta_{(\alpha, +)} - \delta_{(\alpha, -)}]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ce résultat s'avérera essentiel dans le calcul des termes $F_{\mu\nu}^b$ et $F_{\mu\nu}^i$ des fonctions de corrélation.

3. — Discussion des singularités de l'équation de Bethe-Salpeter

a) **Étude de la singularité logarithmique associée au facteur GG.** — Nous avons vu dans la première section de ce chapitre que l'intégrale du produit de deux propagateurs d'arguments respectifs $\left(q + \frac{\varpi}{2}\right)$

et $\left(q - \frac{\varpi}{2}\right)$ introduisait une singularité de la forme $\text{Log} |c^2 k^2 - \omega^2| f(k, \omega)$. A la limite $\varpi \rightarrow 0$, ce facteur devient divergent. Si on calcule Γ par une itération de noyaux I séparés par des paires de propagateurs, on obtient une série de puissances de $x = \text{Log} |c^2 k^2 - \omega^2|$. Pour ϖ fini, cette série a une limite qui est solution de l'équation (6.1). Nous écrivons cette limite sous la forme $\gamma(x, k, \omega)$, de manière à dégager les termes singuliers logarithmiques. En général, pour x constant, γ est développable en série entière par rapport à k et ω . Nous avons effectué un calcul explicite dans le cas d'une interaction I séparable où l'équation intégrale (6.1) se réduit à une simple équation matricielle. Le résultat obtenu est fini, la divergence disparaissant quand on résout l'équation intégrale ; ceci confirme les assertions avancées dans la section 1. Cette conclusion s'étend immédiatement aux noyaux P et M .

Notons cependant que, si la *divergence* a été éliminée dans l'itération des paires de propagateurs, la *singularité* associée au facteur logarithmique subsiste. Cette singularité se traduit par des points de branchement dans le plan de la variable complexe ω , situés à $\omega = \pm (ck - i\delta)$. Ces points de branchement ont une origine « physique » très évidente : ils proviennent des termes associés au fond continu des densités spectrales des diverses quantités considérées. Par exemple, reportons-nous à l'analyse spectrale de $G(k, \omega)$ étudiée dans la section IV-3. Les termes « incohérents » des densités spectrales $A(k, E)$ et $B(k, E)$, correspondant à l'émission de plusieurs excitations élémentaires de moment total $\vec{k}$, ont un seuil à $E = ck$. Il résulte de la représentation spectrale (4.18) que $G(k, \omega)$ contient

deux coupures, pour $\omega = \pm (E - i\delta)$, où E est supérieur à ck . Ces coupures se terminent aux deux points singuliers *essentiels*, $\omega = \pm (ck - i\delta)$, où elles donnent naissance à des termes logarithmiques du type $\text{Log} |ck \pm \omega|$. Les singularités apparaissant dans l'équation de Bethe-Salpeter proviennent simplement des points de branchement dus aux configurations de deux excitations élémentaires.

Les points de branchement en $\omega = \pm (ck - i\delta)$ vont se retrouver dans $M(\varpi)$ et dans les autres noyaux d'interaction. Dans tous les cas, ils donnent naissance à des singularités essentielles lorsque $\varpi \rightarrow 0$. Ces singularités se retrouvent sous un autre aspect lorsqu'on calcule $\partial n'/\partial n_0$ et $\partial n'/\partial \mu$. Dans l'approximation de Beliaev, par exemple, ces quantités divergent, comme d'ailleurs $M_1(\varpi)$ et $M_2(\varpi)$ lorsque $\varpi \rightarrow 0$. La relation intime entre ces deux types de divergence est soulignée par les relations établies au chapitre IV. Il est possible que ces divergences s'éliminent lorsqu'on somme la série de perturbations ; néanmoins, la fonction $n'(n_0, \mu)$ présente certainement une singularité essentielle aux valeurs physiques de n_0 et de μ .

En pratique, ces termes singuliers disparaissent de tous les résultats physiques. Considérons par exemple les dérivées de n' par rapport à μ et n_0 : elles sont singulières. On peut tracer cette singularité à l'apparition d'un gap lorsqu'on fait varier indépendamment μ et n_0 . Si, au contraire, on fait varier simultanément ces deux paramètres de manière à préserver le théorème d'Hugenholtz-Pines (4.5), on constate que la variation de n' est régulière, ce qui conduit à une vitesse du son bien définie. Dans le même ordre d'idées, nous avons vu que $M_1(\varpi)$ et $M_2(\varpi)$ étaient singuliers pour $\varpi \rightarrow 0$: ces singularités s'éliminent des combinaisons de M_1 et M_2 reliées à des quantités physiques. L'exemple le plus simple en est le potentiel chimique μ , donné par (4.5). Utilisant (6.6), nous trouvons :

$$\mu = M_1(0) - M_2(0) = \tilde{M}_1(0) - \tilde{M}_2(0) + \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta_q}} J\gamma\delta(-q; 0) G\gamma\zeta(q) G\delta(q) [P\zeta^+(q; 0) - P\zeta^-(q; 0)].$$

Le terme délicat est le terme réductible que l'on peut récrire, utilisant (6.10) :

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma\delta} J\gamma\delta(-q; 0) [G\gamma^-(q) G^{-\delta}(q) - G\gamma^+(q) G^{+\delta}(q)] \frac{2i}{n_0^{1/2}} M_2(q) \\ = \frac{2i}{n_0^{1/2}} \sum_q [J^{++}(-q; 0) - J^{--}(-q; 0)] \\ \times [G(q)G(-q) - \hat{G}^2(q)] M_2(q). \end{aligned}$$

Utilisant (3.22), on vérifie que :

$$M_2(q) [G(q)G(-q) - \hat{G}^2(q)] = \hat{G}(q),$$

d'où finalement :

$$\mu = \tilde{M}_1(0) - \tilde{M}_2(0) + \frac{2i}{n_0^{1/2}} \sum_q [J^{++}(q; 0) - J^{--}(q; 0)] \hat{G}(q).$$

La singularité associée au facteur GG a disparu dans l'expression de la *quantité physique* μ .

On retrouve cette conclusion dans le calcul de toutes les autres quantités physiques. A l'ordre de Beliaev, par exemple, on constate que les singularités logarithmiques se factorisent dans le dénominateur de la fonction de Green G ; le spectre des phonons est ainsi parfaitement défini. Ceci persiste dans le cas général, comme nous l'avons vu au chapitre IV. De même, nous verrons que les fonctions de corrélations, qui sont directement mesurables, ne dépendent que de quantités physiques, et ne font apparaître aucune singularité.

Il semble donc que les singularités précédentes constituent un intermédiaire inévitable, sans effet physique. Elles seraient dues à la méthode de calcul que nous avons adoptée, qui présente deux inconvénients : d'une part l'utilisation de deux paramètres n_0 et μ dont l'un est non physique, d'autre part l'utilisation de fonctions de Green pour des particules nues, qui sont très éloignées des quasi-particules réelles (les phonons).

Ceci suggère d'éliminer les singularités du calcul en introduisant un cut-off arbitraire dans les intégrations. Une manière commode de réaliser ce cut-off est d'introduire un gap Δ dans le spectre des excitations élémentaires, en modifiant par exemple le potentiel chimique μ . Les singularités du type $\text{Log} |c^2k^2 - \omega^2|$ se transforment en $\text{Log} |4\Delta^2 + c^2k^2 - \omega^2|$. La limite pour k et ω nuls est alors parfaitement définie. On peut conduire tous les calculs en maintenant Δ fini, et faire tendre Δ vers zéro à la fin. Dans la mesure où les résultats physiques ne contiennent pas de singularité logarithmique, ce procédé donne un résultat unique. A titre d'exemple, considérons M_1 et M_2 à l'ordre de Beliaev : ils contiennent séparément un facteur singulier $\log \Delta$, qui disparaît de leur différence μ .

Lorsque Δ est fini, les divers opérateurs M , P , etc., sont des fonctions analytiques de ω et k , que l'on peut développer en série entière. On peut alors sans aucune difficulté reprendre les calculs du chapitre IV et de la section précédente, et établir toutes les relations entre E_0 , M , P et leurs dérivées. Ce faisant, on suppose implicitement que ω et k sont très inférieurs à Δ , ce qui revient à prendre d'abord la limite $(k, \omega) \rightarrow 0$, puis $\Delta \rightarrow 0$. En réalité, nous nous intéressons au cas inverse, où $\Delta \equiv 0$, alors que $(k, \omega) \rightarrow 0$. Pour pouvoir utiliser l'artifice du gap, il faut justifier l'intervention de ces deux passages à la limite.

Cette opération est sûrement impossible pour un terme quelconque. En effet, le développement du terme logarithmique introduira des corrections du type ω/Δ , c^2k^2/Δ^2 , etc., qui interdisent d'emblée l'intervention des limites. Cependant, il peut exister certaines combi-

naisons où ces termes « singuliers » disparaissent, pour lesquelles on peut permuter les deux passages à la limite.

En fin de compte, la justification de nos calculs se ramène à l'analyse de ce processus d'interversion des limites. C'est là une question extrêmement difficile à laquelle nous ne savons pas répondre. Nous nous contenterons d'admettre la validité de notre méthode, qui nous semble justifiée *a posteriori* par les résultats obtenus. Il importe néanmoins de souligner la faiblesse de ce point précis de notre analyse.

b) Equation intégrale satisfaite par M_2 . — La deuxième singularité discutée au début de ce chapitre concerne une solution éventuelle de l'équation intégrale homogène associée à l'équation de Bethe-Salpeter. Une telle solution apparaît dans le cas des supra-conducteurs (cf. Nozières, *op. cit.*, chap. VII) dont l'analyse diagrammatique est très semblable à la nôtre. Comme dans les bosons, on introduit les deux types de propagateurs G et $\hat{G}$ et les deux noyaux de self-énergie M_1 et M_2 . Les termes $\hat{G}$ et M_2 traduisent l'existence d'une phase condensée de paires de particules liées. Contrairement aux bosons, ces paires sont implicitement contenues dans la définition de l'état fondamental, et ne peuvent pas être représentées par des « lignes de vide ». Ceci oblige à travailler avec des diagrammes squelettes, que l'on ne peut pas développer en puissances de G_0 .

Considérons, pour un système de fermions, un diagramme squelette, à deux lignes entrantes q et $-q$, contribuant à $M_2(q)$. Supposons qu'il contienne n propagateurs du type $\longleftrightarrow$. Cela signifie qu'il va rentrer $2n + 2$ particules dans le noyau considéré. Pour assurer le bilan global du nombre de particules, il faudra qu'il en ressorte autant, ce qui implique l'existence dans le même diagramme de $(n + 1)$ lignes du type $\rightarrow\leftarrow$.

Isolons un propagateur $\longleftrightarrow$ dans ce dia-

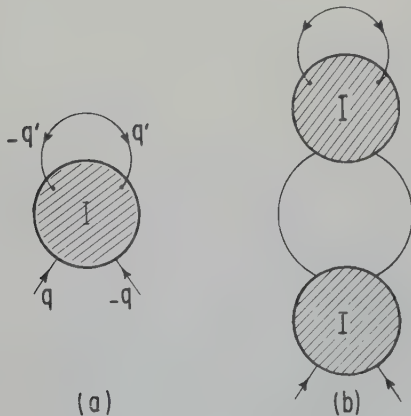


FIG. 45.

gramme M_2 . Le noyau qui subsiste est un noyau irréductible $I^{\pm}(q, q'; 0)$ (fig. a). En effet, un noyau réductible (fig. b) impliquerait que le diagramme de M_2 ne fût pas squelette. Classons les diagrammes contribuant à M_2 par nombre croissant de vertex d'interaction et, pour un diagramme de degré donné dans l'interaction, par nombre n croissant de lignes $\longleftrightarrow$. Isolons alors successivement tous les propagateurs $\longleftrightarrow$ dans toute la série des diagrammes M_2 ainsi classés : il est facile de vérifier qu'on engendre tous les diagrammes contribuant à $I^{\pm}$. A chaque diagramme M_2 contenant n lignes $\longleftrightarrow$ correspondront n diagrammes $I^{\pm}$ et, de même d'après la discussion précédente $(n + 1)$ diagrammes $I^{\pm\pm}$ provenant de l'isolement des lignes $\rightarrow\leftarrow$.

Inversement, fermons l'ensemble des diagrammes $I^{\pm}(q, q'; 0)$ par un propagateur $\hat{G}(q')$. Tout diagramme de M_2 contenant n lignes $\longleftrightarrow$, associé à n diagrammes de $I^{\pm}$, est ainsi reproduit n fois. De même, il apparaît $(n + 1)$ fois si l'on ferme par un propagateur $\hat{G}(q')$ les diagrammes de $I^{\pm\pm}(q, q'; 0)$. On peut donc écrire très généralement :

$$M_2(q) = \sum_{q'} [I^{\pm\pm}(q, q'; 0) - I^{\pm}(q, q'; 0)] \hat{G}(q'). \quad (6.20)$$

Après quelque manipulation, utilisant les propriétés de symétrie des noyaux et des propagateurs pour les fermions, on peut récrire (6.20) sous la forme symbolique :

$$V = \frac{1}{2} \text{IGGV} \quad (6.21)$$

où V est un « vecteur » défini par :

$$V_{\alpha\beta} = -\alpha M_2 \delta_{(\alpha,\beta)}.$$

V apparaît ainsi comme une solution de l'équation homogène associée à l'équation de Bethe-Salpeter. Celle-ci a donc $\varpi = 0$ pour valeur propre, et les noyaux d'interaction sont singuliers pour cette valeur $\varpi = 0$. Cette singularité correspond à l'existence de paires liées, et est fondamentale dans l'étude de la réponse des supra-conducteurs à un champ extérieur.

Dans le cas des bosons, l'analyse diagrammatique précédente est rendue plus complexe par la présence des lignes de vide. Si le diagramme squelette à deux lignes entrantes q et $-q'$ contribuant à $M_2(q)$ contient n lignes $\longleftrightarrow$ et l lignes de vide entrantes, cela signifie qu'il rentre $2n + l + 2$ particules dans le diagramme. Pour assurer le bilan global du nombre de particules, les nombres n' de lignes $\rightarrow\leftarrow$ et l' de lignes de vide sortantes devront vérifier la relation :

$$2n + l + 2 = 2n' + l'. \quad (6.22)$$



FIG. 46.

Isolons une ligne $\longleftrightarrow$ d'un diagramme M_2 (fig. c). Comme pour les fermions, le noyau $I^{\pm}(q, q'; 0)$ qui subsiste est irréductible. Inversement, fermons ce noyau par un propagateur $\check{G}$ et sommions sur q' et sur les diagrammes de $I^{\pm}$. Tout diagramme de M_2 contenant n lignes $\longleftrightarrow$ apparaît n fois. Nous représentons formellement cette relation par :

$$\frac{1}{2} \sum_{q'} I^{\pm}(q, q'; 0) \check{G}(q') = n M_2(q). \quad (6.23)$$

Notons le facteur $\frac{1}{2}$, dû à l'invariance du diagramme complet dans la transformation $\bar{q}' \rightarrow -q'$. De même, isolons l'une des n' lignes $\longleftrightarrow$ du diagramme M_2 : nous obtenons un noyau $I^{\pm\pm}(q, q'; 0)$ (fig. d). En



FIG. 47.

refermant ce noyau par une ligne $\widehat{G}(q')$, nous arrivons à la relation :

$$\frac{1}{2} \sum_{q'} I^{\pm\pm}(q, q'; 0) \widehat{G}(q') = n' M_2(q). \quad (6.24)$$

Isolons maintenant une ligne de vide sortante :

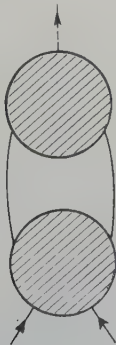


FIG. 48.

nous obtenons un diagramme $J^{\pm+}(q; 0)$. Ce diagramme est forcément irréductible, sinon le diagramme M_2 dont il provient ne serait pas squelette (figure ci-contre).

Inversement, considérons les l' diagrammes $J^{\pm+}(q; 0)$ que l'on peut former à partir du diagramme initial M_2 .

Au facteur $\frac{n_0^{1/2}}{i}$ près, ils donnent tous la même contribution $M_2(q)$. Nous écrirons donc formellement :

$$\frac{n_0^{1/2}}{i} J^{\pm+}(q; 0) = l' M_2(q). \quad (6.25 a)$$

Notons que $J^{\pm+}$ ne contient que des diagrammes du type :



FIG. 49.

à l'exclusion des diagrammes réductibles :



FIG. 50.

(En d'autres termes, un diagramme squelette M_2 ne contient que des vertex V_a , V_b et V_c). Une exception

cependant : le diagramme du premier ordre qui, néanmoins, satisfait (6.25).

De même, en isolant l'une des l lignes du diagramme M_2 , on arrive à la relation :

$$\frac{n_0^{1/2}}{i} J^{\pm-}(q; 0) = l M_2(q). \quad (6.25 b)$$

Utilisant (6.22) et les expressions (6.23), (6.24) et (6.25), on vérifie que $M_2(q)$ satisfait terme à terme la relation générale :

$$2M_2(q) = \frac{n_0^{1/2}}{i} [J^{\pm+}(q; 0) - J^{\pm-}(q; 0)] + \sum_{q'} [I^{\pm\pm}(q, q'; 0) - I^{\pm-}(q, q'; 0)] \widehat{G}(q'). \quad (6.26)$$

Utilisant la relation :

$$\widehat{G}(q) = [G(q)G(-q) - \widehat{G}^2(q)]M_2(q)$$

et s'appuyant sur les propriétés de symétrie particulières de $I^{\gamma\delta}$ lorsque $\varpi = 0$, on peut récrire (6.26) sous la forme :

$$\frac{2i}{n_0} M_2(q) = [J^{+-}(q; 0) - J^{-+}(q; 0)] + \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} I^{\gamma\delta}(q, q'; 0) \times [G\gamma^-(q')G^{-\delta}(q') - G\gamma^+(q')G^{+\delta}(q')] \frac{2i}{n_0} M_2(q'). \quad (6.27)$$

Comme dans le cas des supra-conducteurs, nous définissons un « vecteur » :

$$V_{\alpha\beta}(q) = -\alpha \frac{2i}{n_0} M_2(q) \delta_{(\alpha,\beta)}.$$

Les propriétés de symétrie des noyaux d'interaction et des propagateurs nous permettent de vérifier les relations suivantes dans le cas $\alpha \neq \beta$:

$$J^{\alpha\beta}(q; 0) - J^{\beta\alpha}(q; 0) = 0; \\ \sum_{\gamma\delta} I^{\alpha\beta}(q, q'; 0) [G\gamma^-(q')G^{-\delta}(q') - G\gamma^+(q')G^{+\delta}(q')] = 0.$$

Nous pouvons donc récrire (6.27) sous la forme :

$$V_{\alpha\beta}(q) = [J^{\alpha\beta}(q; 0) - J^{\beta\alpha}(q; 0)] + \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} I^{\alpha\beta}(q, q'; 0) G\gamma^{\zeta}(q') G^{\varepsilon}(q') V_{\zeta\varepsilon}(q'). \quad (6.28)$$

$V_{\alpha\beta}(q)$ apparaît ainsi, dans le cas des bosons, comme solution d'une équation de Bethe-Salpeter *inhomogène*. Le terme inhomogène, qui n'apparaissait pas dans

un supra-conducteur, est dû à la présence explicite de vertex incomplets dans les diagrammes squelettes contribuant à M_2 .

Dans un supra-conducteur, la phase condensée est *implicitement* contenue dans le formalisme : les singularités de F sont associées à la singularité de l'équation de Bethe-Salpeter, c'est-à-dire à l'existence d'une solution de l'équation homogène (6.21). Pour un système de bosons, au contraire, la phase condensée apparaît *explicitement*. Les singularités de F se produisent lorsque l'une des lignes intermédiaires a le quadrimoment $(k, \omega) = 0$, c'est-à-dire pour les diagrammes du type :

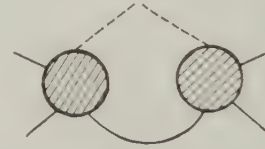


FIG. 51.

On voit immédiatement que les singularités de F seront celles de G . Ceci souligne la différence essentielle de comportement entre un supra-conducteur et un système de bosons, traduite mathématiquement par l'apparition du terme inhomogène de (6.28).

Il convient de remarquer que la solution de (6.28) se déduit fort simplement de (6.4). Elle est donnée par :

$$V_{\alpha\beta}(q) = P_{\alpha\beta}^+(q; 0) - P_{\alpha\beta}^-(q; 0).$$

En comparant cette solution avec la définition de $V_{\alpha\beta}(q)$, on retrouve la relation (6.10) établie directement. Nous avons cependant donné cette discussion en détail afin de mettre en évidence l'origine des différences entre fermions et bosons.

VII. — RÉPONSE LINÉAIRE AUX EXCITATIONS DE GRANDE LONGUEUR D'ONDE

Nous avons vu au chapitre V que la réponse linéaire du système à une excitation extérieure faible était déterminée par les fonctions de corrélation (5.19). Nous allons calculer ces fonctions $F_{\mu\nu}(\varpi)$ dans la limite $\varpi \rightarrow 0$, correspondant aux grande longueur d'onde et basse fréquence excitatrices.

1. — Calcul des fonctions de corrélation à la limite $\varpi \rightarrow 0$

La décomposition effectuée au chapitre V fait apparaître deux types de diagrammes très différents : d'une

part les diagrammes contribuant à $F_{\mu\nu}^a(\varpi)$, $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$ et $F_{\mu\nu}^i(\varpi)$ contenant un propagateur intermédiaire de quadrimoment ϖ , d'autre part les diagrammes $F_{\mu\nu}^r(\varpi)$ (voir section V, 4). Les premiers font intervenir le noyau d'interaction P , les seconds le noyau Γ . Nous allons les étudier successivement.

a) Termes faisant intervenir les noyaux de type P .

— Nous pouvons réduire considérablement l'écriture des fonctions $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$ et $F_{\mu\nu}^i(\varpi)$ en introduisant les « vertex parts » $\Upsilon_{\mu}^{\eta}(\varpi)$ regroupant la contribution du

noyau P, de la paire de propagateurs qui lui est attachée et du facteur « extérieur » $\lambda_\mu(q)$. Nous écrirons $\Upsilon_\mu^\eta(\varpi)$ sous la forme :

$$\Upsilon_\mu^\eta(\varpi) = \sum_q \lambda_\mu(\vec{q}) L^\eta(q; \varpi), \quad (7.1)$$

où la quantité $L^\eta(q; \varpi)$, représentée par le diagramme ci-contre :

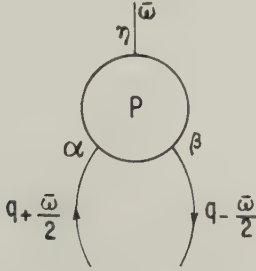


FIG. 52.

est donnée par :

$$L^\eta(q; \varpi) = \sum_{\alpha\beta} G^{+\alpha}\left(q + \frac{\varpi}{2}\right) P^{\eta\alpha\beta}(q; \varpi) G^{\beta-}\left(q - \frac{\varpi}{2}\right). \quad (7.2)$$

Les propriétés de symétrie des noyaux $P^{\eta\alpha\beta}$ et des propagateurs se traduisent par la relation :

$$L^+(q; \varpi) = L^-(q; -\varpi).$$

Nous poserons désormais :

$$L(q; \varpi) = L^+(q; \varpi) = \frac{1}{2} [L^+(q; \varpi) + L^-(q; -\varpi)]. \quad (7.3)$$

Cette propriété de symétrie se conservant pour la vertex part Υ_μ , nous écrirons de même :

$$\Upsilon_\mu(\varpi) = \Upsilon_\mu^+(\varpi) = \frac{1}{2} [\Upsilon_\mu^+(\varpi) + \Upsilon_\mu^-(\varpi)]. \quad (7.4)$$

Les fonctions $F_{\mu\nu}^b(\varpi)$ et $F_{\mu\nu}^i(\varpi)$, définies au chapitre V prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^b(\varpi) = & n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) [G(\varpi) \Upsilon_\nu(\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\nu(-\varpi)] + n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) [G(-\varpi) \Upsilon_\nu(-\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\nu(\varpi)] \\ & + n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) [G(\varpi) \Upsilon_\mu(\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\mu(-\varpi)] + n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) [G(-\varpi) \Upsilon_\mu(-\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\mu(\varpi)]; \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$F_{\mu\nu}^i(\varpi) = \Upsilon_\nu(\varpi) [G(\varpi) \Upsilon_\mu(\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\mu(-\varpi)] + \Upsilon_\nu(-\varpi) [G(-\varpi) \Upsilon_\mu(-\varpi) + \widehat{G}(\varpi) \Upsilon_\mu(\varpi)]. \quad (7.6)$$

Si nous rapprochons ces expressions de $F_{\mu\nu}^a$ donné par (5.21), nous pouvons regrouper ces trois contribu-

tions en $F_{\mu\nu}^t(\varpi) = F_{\mu\nu}^a(\varpi) + F_{\mu\nu}^b(\varpi) + F_{\mu\nu}^i(\varpi)$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^t(\varpi) = & G(\varpi) \left[n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\mu(\varpi) \right] \left[n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\nu(\varpi) \right] \\ & + G(-\varpi) \left[n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\mu(-\varpi) \right] \left[n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\nu(-\varpi) \right] \\ & + \widehat{G}(\varpi) \left[n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\mu(\varpi) \right] \left[n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\nu(-\varpi) \right] + \widehat{G}(\varpi) \left[n_0^{1/2} \lambda_\mu\left(-\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\mu(-\varpi) \right] \left[n_0^{1/2} \lambda_\nu\left(\frac{\vec{k}}{2}\right) + \Upsilon_\nu(\varpi) \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

L'analyse détaillée de $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$ montre qu'il suffit d'obtenir l'expression des vertex parts Υ au premier ordre en ϖ pour avoir une approximation cohérente d'ordre zéro de la fonction de corrélation au voisinage de $\varpi = 0$ (bien que chaque G soit séparément d'ordre ϖ^{-2}). Cette simplification est due au regroupement des différents facteurs G, comme nous le verrons par la suite. Les résultats de la section VI, 2 permettent alors d'effectuer le calcul de Υ . Tout d'abord, l'expression :

$$L(q; 0) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} G^{+\alpha}(q) [P^{\alpha\beta}(q; 0) + P^{\beta\alpha}(q; 0)] G^{\beta-}(q)$$

est immédiatement obtenue en utilisant la relation (6.10), soit :

$$L(q; 0) = i n_0^{1/2} \sum_{\alpha\beta} G^{+\alpha}(q) \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0} G^{\beta-}(q).$$

En se reportant à l'appendice, on voit que l'on peut écrire :

$$L(q; 0) = i n_0^{1/2} \frac{\partial G(q)}{\partial n_0}. \quad (7.8)$$

De même, on peut développer au premier ordre en ϖ l'expression $L(q; \varpi)$ définie par (7.3) et (7.2),

en utilisant le développement de $P^{\alpha\beta}(q; \varpi)$ (6.19), et les relations établies dans l'appendice. On trouve ainsi :

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} L(q; \varpi) - i n_0^{1/2} \frac{\partial G(q)}{\partial n_0} = \frac{i}{2 n_0^{1/2}} \left[\omega \left(\frac{\partial G(q)}{\partial \mu} - \frac{\partial G(q)}{\partial q^0} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial G(q)}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial G(q)}{\partial \vec{q}} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Nous rappelons que la notation $\delta/\delta \vec{q}$ représente la variation du premier ordre obtenue en observant le système d'un référentiel en mouvement de translation uniforme tel que le moment de chaque particule soit augmenté de $\delta \vec{q}$.

Le calcul conduisant au résultat (7.9) est long et fastidieux. Nous ne le reproduisons pas, préférant obtenir directement $L(q; \varpi)$ par application de la méthode générale employée dans la section VI, 2.

Considérons un diagramme contribuant à $G(q)$: il est constitué d'une chaîne linéaire de propagateurs G_0 séparés par des noyaux de self-énergie M . Nous pouvons sélectionner dans le diagramme une ligne « guide » reliant les deux extrémités du propagateur G . Comme nous l'avons fait dans la section VI, 2, nous rattachons alors toutes les lignes de vide à la ligne guide par des chemins *uniques*, rayonnant depuis la ligne guide. Ces divers chemins sont représentés sur la figure ci-dessous, à l'exclusion des autres lignes internes du diagramme. La structure générale du diagramme $G(q)$ est semblable à celle de $M_1(q)$ représentée dans la section VI, 2a, le chemin reliant deux lignes de vide rattachées à des noyaux M différents empruntant une partie de la ligne guide.

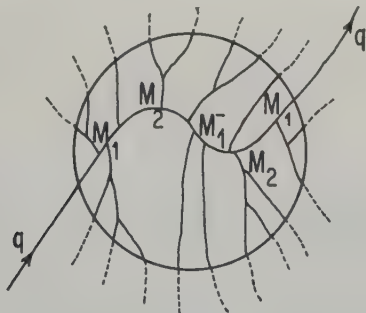


FIG. 53.

Nous pouvons alors répéter mot pour mot l'analyse de la section VI, 2a : isoler une ligne quelconque du diagramme, et étudier sa variation quand on augmente le potentiel chimique μ de $\delta \mu = \omega$. Nous devons de nouveau distinguer deux cas suivant que la ligne considérée se trouve ou non sur la ligne guide, reliant les deux propagateurs externes $G_0(q)$.

Si la ligne étudiée se trouve en dehors de la ligne guide, sa variation au premier ordre quand on cal-

cule $[G(q; \mu + \delta \mu) - G(q; \mu)]$ est exactement compensée par la variation obtenue en augmentant successivement de ω l'énergie de toutes les lignes de vide du diagramme. Si la ligne considérée est sur la ligne guide, la première variation est excédentaire et doit être compensée par une variation de la seule ligne guide. La transposition des résultats (6.11), (6.12) est donc très simple. Lorsqu'on isolait une ligne de vide sur un diagramme M , on obtenait un diagramme de P . De même, le choix d'une ligne de vide sur un diagramme G fournit un diagramme L . Plus précisément, en attribuant l'énergie ω à une ligne de vide sortante, on obtient un diagramme $L^+(q; \omega)$; en l'attribuant à une ligne de vide entrante, on obtient $L^-(q; -\omega)$. Pour transposer (6.13), il suffit de changer :

$$\begin{cases} M_1(q) \text{ en } G(q), \\ P^{-\eta}(q; \omega) \text{ en } L^{\eta}(q; \omega). \end{cases} \quad (7.10)$$

On obtient ainsi :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [L(q; \omega) - L(q; 0)] = \frac{i}{2 n_0^{1/2}} \omega \left(\frac{\partial G(q)}{\partial \mu} - \frac{\partial G(q)}{\partial q^0} \right). \quad (7.11)$$

On peut de même étudier la variation de G quand on observe le système d'un référentiel en mouvement. Regroupant le résultat ainsi obtenu et la relation (7.11), on retrouve l'expression générale (7.9).

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la fonction $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$. La vertex part :

$$\Upsilon_{\mu}(\varpi) = \sum_q \lambda_{\mu}(\vec{q}) L(q; \varpi)$$

s'obtient en remplaçant L par son développement (7.9). En négligeant les termes impairs en $\vec{q}$ qui s'éliminent par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} \Upsilon_i(\varpi) &= \frac{i}{2 n_0^{1/2}} \sum_{q, \alpha} \frac{q_i}{m} k_{\alpha} \left\{ \frac{\partial G(q)}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial G(q)}{\partial q_{\alpha}} \right\}; \\ \Upsilon_4(\varpi) &= \frac{i}{n_0^{1/2}} \sum_q \left\{ n_0 \frac{\partial G(q)}{\partial n_0} + \frac{\omega}{2} \left[\frac{\partial G(q)}{\partial \mu} - \frac{\partial G(q)}{\partial q^0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

L'intégration sur q^0 s'effectue facilement en remarquant que :

$$\frac{i}{2\pi} \int dq^0 G(q) = n_q.$$

Les expressions précédentes deviennent alors (en utilisant notre définition de $\sum_q$) :

$$\Upsilon_i(\varpi) = \frac{1}{n_0^{1/2}} n' \frac{k_i}{2m} + \frac{1}{2 n_0^{1/2}} \sum_{q, \alpha} \frac{q_i}{m} k_{\alpha} \frac{\delta n_q}{\delta q_{\alpha}}; \quad (7.12)$$

$$\Upsilon_4(\varpi) = n_0^{1/2} \frac{\partial n'}{\partial n_0} + \frac{\omega}{2n_0^{1/2}} \frac{\partial n'}{\partial \mu}. \quad (7.13)$$

(Le terme $\partial G / \partial q^0$ donne une contribution nulle, car $G(\vec{q}, q^0)$ est nul, d'ordre $1/q^0$, lorsque $q^0 \rightarrow \infty$).

$\delta n_q / \delta \vec{q}$ mesure la différence entre le nombre de particules de moment $\vec{q} + \delta \vec{q}$ quand on observe le système du référentiel en mouvement et le nombre de particules de moment $\vec{q}$ quand on se place dans le référentiel fixe. Pour un système invariant par translation, ces deux nombres sont évidemment les mêmes : le dernier terme de (7.12) est alors nul. Nous nous limitons à ce cas simple.

Reportant les valeurs (7.12) et (7.13) de la vertex part dans l'expression générale (7.7), on obtient les diverses composantes de la fonction de corrélation $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{44}^t(\varpi) &= n_0 \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right)^2 [G(\varpi) + G(-\varpi) + 2\widehat{G}(\varpi)] + \omega \frac{\partial n'}{\partial \mu} \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right) [G(\varpi) - G(-\varpi)] \\ &\quad + \frac{\omega^2}{4n_0} \left(\frac{\partial n'}{\partial \mu} \right)^2 [G(\varpi) + G(-\varpi) - 2\widehat{G}(\varpi)]; \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{i4}^t(\varpi) = n \frac{k_i}{2m} \left\{ \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right) [G(\varpi) - G(-\varpi)] + \frac{\omega}{2n_0} \frac{\partial n'}{\partial \mu} [G(\varpi) + G(-\varpi) - 2\widehat{G}(\varpi)] \right\}; \quad (7.15)$$

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{ij}^t(\varpi) = \frac{n^2}{n_0} \frac{k_i}{2m} \frac{k_j}{2m} [G(\varpi) + G(-\varpi) - 2\widehat{G}(\varpi)]. \quad (7.16)$$

On voit apparaître dans ces expressions trois combinaisons différentes de propagateurs G qui s'écrivent (cf. (3.22)) :

$$\begin{aligned} G(\varpi) - G(-\varpi) &= 2 \left[\frac{\omega - \frac{1}{2} [M_1(\varpi) - M_1(-\varpi)]}{D} \right]; \\ G(\varpi) + G(-\varpi) \pm 2\widehat{G}(\varpi) &= 2 \left[\frac{\varepsilon_k^0 + \frac{1}{2} [M_1(\varpi) + M_1(-\varpi)] - \mu \mp M_2(\varpi)}{D} \right]. \end{aligned}$$

Ces expressions font intervenir uniquement les combinaisons « physiques » des opérateurs de self-énergie étudiées au chapitre IV. Les résultats (4.5), (4.8) et (4.13) nous conduisent aux relations :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varpi \rightarrow 0} [G(\varpi) - G(-\varpi)] &= \frac{2\omega \left(1 + \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right)}{D}, \\ \lim_{\varpi \rightarrow 0} [G(\varpi) + G(-\varpi) - 2\widehat{G}(\varpi)] &= \frac{4M_2(0)}{D}, \\ \lim_{\varpi \rightarrow 0} [G(\varpi) + G(-\varpi) + 2\widehat{G}(\varpi)] &= \frac{nk^2 - \omega^2 \frac{\partial n'}{\partial \mu}}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

où D est donné par l'équation (4.14). Nous avons vu que le terme dominant de $D(\varpi)$ dans la limite $\varpi \rightarrow 0$ était du deuxième ordre en ϖ . Utilisant (7.17), nous vérifions que tous les termes calculés de $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$ sont d'ordre zéro en ϖ . Si nous avions calculé les vertex parts aux ordres supérieurs au premier, nous aurions obtenu des contributions à $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$ du deuxième ordre en ϖ , donc négligeables. Nous avons ainsi effectué les calculs à un degré d'approximation cohérent.

Il est maintenant facile d'explicitier les fonctions $F_{\mu\nu}^t(\varpi)$. Auparavant, nous calculerons les contributions $F_{\mu\nu}^r(\varpi)$.

b) Termes faisant intervenir les noyaux de type Γ .

— De la discussion précédente, il ressort que nous devons calculer $F_{\mu\nu}^r(\varpi)$ à l'ordre zéro en ϖ , soit $F_{\mu\nu}^r(0)$. Au chapitre VI, nous étions arrivés à la conclusion que

notre seule information concernant le noyau Γ était l'équation de Bethe-Salpeter (6.1). Ceci s'avère suffisant pour calculer $F_{\mu\nu}^r(0)$: nous pouvons alors, en effet, établir des « identités de Ward » reliant les dérivées des opérateurs de self-énergie $M(q)$ et les vertex parts $\Lambda_\mu(q; 0)$ correspondant aux noyaux Γ . Cette technique a été appliquée pour la première fois au problème à N-corps par Pitævskii (III) dans le cas des fermions et réutilisée indépendamment par Nozières et Luttinger.

Les diagrammes contribuant à $F_{\mu\nu}^r(\varpi)$ sont représentés sur la figure ci-après.

On peut les regrouper sous la forme :

$$F_{\mu\nu}^r(\varpi) = i \sum_{\substack{\alpha\beta \\ q}} \Lambda_\mu^{\alpha\beta}(q; \varpi) G^{+\alpha} \left(q + \frac{\varpi}{2} \right) G^{\beta-} \left(q - \frac{\varpi}{2} \right) \lambda_\nu(\vec{q}) \quad (7.18)$$

où la vertex part $\Lambda_\mu^{\alpha\beta}(q; \varpi)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{\alpha\beta}(q; \varpi) &= [\lambda_\mu(\vec{q}) \delta_{(\alpha,-)} + \lambda_\mu(-\vec{q}) \delta_{(\alpha,+)}] \delta_{\alpha,-\beta} \\ &\quad + \sum_{\substack{\gamma\delta \\ q'}} \Gamma_{\mu}^{\gamma\delta}(q, q'; \varpi) G^{\gamma-} \left(q' + \frac{\varpi}{2} \right) G^{+\delta} \left(q' - \frac{\varpi}{2} \right) \lambda_\mu(\vec{q}'). \end{aligned}$$

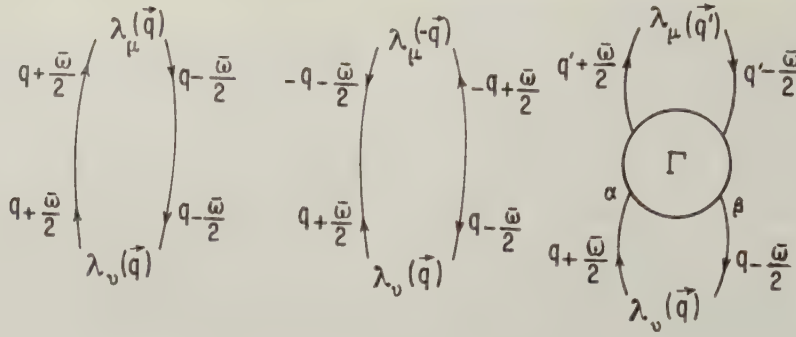


FIG. 54.

Le deuxième terme de $\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}$ correspond à l'ensemble des diagrammes ci-contre :

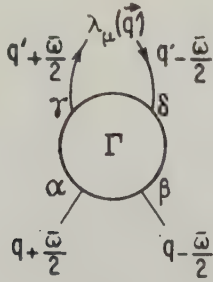


FIG. 55.

La vertex part $\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}(q; \varpi)$ satisfait l'équation de Bethe-Salpeter suivante :

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}(q; \varpi) = [\lambda_{\mu}(\vec{q})\delta_{(\alpha,-)} + \lambda_{\mu}(-\vec{q})\delta_{(\alpha,+)}]\delta_{\alpha,-\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} \Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q, q'; \varpi) G^{\gamma\zeta}\left(q' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q' - \frac{\varpi}{2}\right) \Lambda_{\mu}^{\zeta\epsilon}(q'; \varpi) \quad (7.19)$$

(où le facteur $\frac{1}{2}$ a la même origine que celui de l'équation (6.1)). En effet, le terme d'ordre zéro de $\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}$ correspond au terme inhomogène de (7.19). Dans les termes d'ordre supérieur ou égal à 1, on peut isoler le premier noyau I en partant du bas ; celui-ci est surmonté, par l'intermédiaire de deux propagateurs G, d'une vertex part complète Λ_{μ} : d'où le deuxième terme de (7.19). Reportant dans (7.19) les valeurs de $\lambda_{\mu}(\vec{q})$ (5.19), nous obtenons respectivement :

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}(q; \varpi) = \delta_{(\alpha,-\beta)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} \Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q, q'; \varpi) G^{\gamma\zeta}\left(q' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q' - \frac{\varpi}{2}\right) \Lambda_{\mu}^{\zeta\epsilon}(q'; \varpi); \quad (7.20)$$

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha\beta}(q; \varpi) = \frac{q_i}{m} \delta_{(\alpha,-\beta)} [\delta_{(\alpha,-)} - \delta_{(\alpha,+)}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} \Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q, q'; \varpi) G^{\gamma\zeta}\left(q' + \frac{\varpi}{2}\right) G^{\epsilon\delta}\left(q' - \frac{\varpi}{2}\right) \Lambda_{\mu}^{\zeta\epsilon}(q'; \varpi). \quad (7.21)$$

Ces équations déterminent entièrement les vertex parts.

Suivant la méthode utilisée par Nozières et Luttinger dans le cas des fermions, nous considérons maintenant les diagrammes squelettes représentant les noyaux de self-énergie $M^{\alpha\beta}$. Isolons un propagateur quelconque :

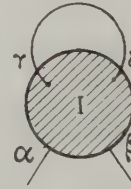


FIG. 56.

nous obtenons une contribution du noyau $I^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$. Nous ne pouvons pas en effet obtenir de contribution réductible par rapport à la diffusion de deux excitations, sinon le diagramme $M^{\alpha\beta}$ ne serait pas squelette (voir discussion VI, 3b).

Nous avons vu au chapitre IV qu'une variation $\delta\mu$ du potentiel chimique se traduisait par une variation correspondante de l'énergie de tous les propagateurs intervenant dans les diagrammes. Au premier ordre en $\delta\mu$, la variation de $M^{\alpha\beta}$ est la somme de tous les termes obtenus en dérivant successivement chacune des lignes internes. D'après la discussion précédente, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} \Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(q, q'; 0) \frac{\partial G^{\gamma\delta}(q')}{\partial \mu} \quad (7.22)$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ provient de la symétrie dans l'échange $q' \rightarrow -q'$).

De même, si nous observons le système d'un référentiel en mouvement de translation uniforme, tel que le moment de chaque particule soit augmenté de $\delta \vec{q}$, le moment de *tous* les propagateurs est modifié de $\delta \vec{q}$ et la variation correspondante de $M^{\alpha\beta}$ s'écrit :

$$\frac{\delta M^{\alpha\beta}(q)}{\delta \vec{q}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ q'}} I^{\gamma\delta}(q, q'; 0) \frac{\delta G^{\gamma\delta}(q')}{\delta \vec{q}}. \quad (7.23)$$

Utilisant les relations établies dans l'appendice, nous obtenons les équations de Bethe-Salpeter suivantes pour les dérivées de $M^{\alpha\beta}$:

$$\frac{\delta M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} I^{\gamma\delta}(q, q'; 0) G^{\zeta\epsilon}(q') \times \left(\frac{\partial M^{\zeta\epsilon}(q')}{\partial \mu} - \delta(\zeta, -\epsilon) \right) G^{\epsilon\delta}(q'), \quad (7.24)$$

$$\frac{\delta M^{\alpha\beta}(q)}{\delta q_i} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \zeta\epsilon \\ q'}} I^{\gamma\delta}(q, q'; 0) G^{\zeta\epsilon}(q') \times \left\{ \frac{\delta M^{\zeta\epsilon}(q')}{\delta q_i} + \frac{q'_i}{m} \delta(\zeta, -\epsilon) [\delta(\zeta, -) - \delta(\zeta, +)] \right\} G^{\epsilon\delta}(q'). \quad (7.25)$$

La comparaison des équations (7.20) et (7.24) d'une part, (7.21) et (7.25) d'autre part, conduit immédiatement aux identités de Ward :

$$\Lambda_4^{\alpha\beta}(q; 0) = \delta(\alpha, -\beta) - \frac{\partial M^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu}, \quad (7.26)$$

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(q; 0) = \frac{q_i}{m} \delta(\alpha, -\beta) [\delta(\alpha, -) - \delta(\alpha, +)] + \frac{\delta M^{\alpha\beta}(q)}{\delta q_i}. \quad (7.27)$$

Nous sommes désormais en mesure de calculer le terme $F_{\mu\nu}^r(0)$ des fonctions de corrélation, défini par (7.18). Reportant (7.26) et (7.27) dans cette expression et utilisant les résultats de l'appendice, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} F_{44}^r(0) &= -i \sum_q \frac{\partial G(q)}{\partial \mu} = -\frac{\partial n'}{\partial \mu}; \\ F_{i4}^r(0) &= i \sum_q \frac{\delta G(q)}{\delta q_i} = 0; \\ F_{ij}^r(0) &= i \sum_q \frac{q_j}{m} \frac{\delta G(q)}{\delta q_i} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Le dernier terme est nul à cause de l'invariance translationnelle du système (voir discussion de l'équation (7.12)).

Nous pouvons maintenant calculer la limite quand $\varpi \rightarrow 0$ des fonctions de corrélation. Regroupant les

résultats (7.14 à 7.17) et (7.28), et utilisant l'expression (4.2) de la vitesse du son, nous obtenons après des calculs sans difficulté :

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{44}(\varpi) = \frac{n \frac{k^2}{m}}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta}; \quad (7.29)$$

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{i4}(\varpi) = \frac{n \omega \frac{k_i}{m}}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta}; \quad (7.30)$$

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} F_{ij}(\varpi) = \frac{n c^2 \frac{k_i k_j}{m}}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta}. \quad (7.31)$$

Remarquons que les composantes de F_{ij} et F_{i4} transverses par rapport à la direction du vecteur d'onde sont nulles. Ces expressions très simples ne font intervenir que des quantités « physiques » : la densité n , la masse m , la vitesse du son c . Elles sont valables à tous les ordres du calcul de perturbation.

2. — Discussion des résultats

La fonction de réponse du courant, définie au chapitre V, est :

$$K_{ij}(\varpi) = F_{ij}(\varpi) + \frac{n}{m} \delta_{ij}.$$

Formons la combinaison $\sum_j k_j K_{ij}(\varpi)$. Les résultats précédents conduisent au résultat :

$$\sum_j k_j K_{ij}(\varpi) = \frac{\frac{n}{m} k_i \omega^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta} \quad (7.32)$$

qui, d'après (7.30), est égal à $\omega F_{i4}(\varpi)$. De même, on vérifie que la somme :

$$\sum_i k_i F_{i4}(\varpi) = \frac{\frac{n}{m} \omega k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta} \quad (7.33)$$

est égale à $F_{44}(\varpi)$. Les expressions que nous venons d'obtenir pour les fonctions de corrélation satisfont donc les relations de conservation (5.16).

Étudions plus particulièrement le courant induit par une rotation uniforme du récipient contenant He II, discutée en détail dans la section V, 1b. La rotation uniforme correspond évidemment à la limite $\vec{\omega} = 0$ (Ne pas confondre la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et la fréquence ω). K_{ij} prend alors la forme suivante :

$$K_{ij} = -\frac{n}{m k^2} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}). \quad (7.34)$$

En reportant cette valeur dans (5.15), on obtient :

$$j_{k_i}^{\text{tot}} = n \sum_j \left(\frac{k_i k_j - k^2 \delta_{ij}}{k^2} \right) A_{kj}. \quad (7.35)$$

Nous vérifions l'invariance de jauge $\sum_j K_{ij} k_j = 0$ (ceci est évident d'après (7.32) quand $\omega = 0$).

Transposée dans l'espace de configuration, (7.35) n'est autre que l'équation de London :

$$\vec{\text{rot}} \vec{j}(\vec{r}) = -n \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}). \quad (7.36)$$

Nous n'insisterons pas sur l'analogie formelle entre (7.36) et l'équation de London obtenue pour un supra-conducteur dans un champ magnétique. Cette comparaison a été étudiée en détail par Schafroth.

Nous allons maintenant relier la fonction de corrélation des fluctuations de densité $F_{44}(\omega)$ à la fonction de corrélation $S(k, \omega)$ définie au chapitre II. Utilisant (5.7) et l'invariance par réflexion, on peut mettre $F_{44}(\omega)$ sous la forme :

$$F_{44}(\omega) = \sum_n |(\rho_{k/0}^*)^n|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} \right\}. \quad (7.37)$$

Si nous rapprochons de cette expression la définition de la fonction de corrélation :

$$S(k, \omega) = \sum_n |(\rho_{k/0}^*)^n|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}),$$

nous trouvons deux relations complémentaires. La première permet de calculer $S(k, \omega)$ connaissant $F_{44}(\omega)$ et s'écrit :

$$S(k, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}_{\omega > 0} F_{44}(k, \omega). \quad (7.38)$$

La deuxième exprime $F_{44}(\omega)$ en fonction de $S(k, \omega)$ sous la forme :

$$F_{44}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\omega' S(k, \omega') \left\{ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega' - i\eta} \right\}. \quad (7.39)$$

La troisième règle de somme (2.14) s'écrit immédiatement, d'après (7.39) :

$$\lim_{k \rightarrow 0} F_{44}(k, \omega = 0) = -\frac{n}{mc^2}.$$

(Nous rappelons que nous avons posé $\Omega = 1$).

Nous pouvons vérifier sur l'expression (7.29) qu'elle est satisfaite.

La relation (7.29) nous permet d'obtenir :

$$\lim_{(k, \omega) \rightarrow 0} S(k, \omega) = \frac{nk^2}{2mck} \delta(\omega - ck).$$

Nous pouvons étendre ce résultat en dehors de la région $\omega \rightarrow 0$ en écrivant :

$$\lim_{k \rightarrow 0} S(k, \omega) = \frac{nk^2}{2mck} \delta(\omega - ck) + \text{Sinc}(k, \omega) \quad (7.40)$$

où $\text{Sinc}(k, \omega)$ est négligeable lorsque k et ω tendent vers zéro. Le premier terme de cette expression sature la règle de somme (2.13) : nous en déduisons que :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \text{Sinc}(k, \omega)$$

est nul, même lorsque ω est fini, conformément au résultat de Feynman. La fonction de corrélation S prend alors la forme :

$$\lim_{k \rightarrow 0} S(k, \omega) = nS(k) \delta(\omega - ck) \quad (7.41)$$

où $S(k) = \frac{k^2}{2mck}$. Ceci n'est autre que la relation (2.15).

Nous vérifions bien le résultat fondamental de Feynman énoncé au chapitre II : *il n'y a pas de backflow associé aux phonons*. Le terme incohérent de S disparaît lorsque $k \rightarrow 0$, seuls les états à un phonon contribuent à la fonction $S(k)$.

Pour terminer cette discussion des fonctions de corrélation, remarquons que les résultats (7.29) à (7.31) peuvent s'établir directement si l'on suppose que les opérateurs ρ_k et $\vec{j}_k$, définis par (5.17) et (5.18), ne couplent l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ qu'à l'état excité contenant une seule excitation élémentaire k (à l'exclusion des configurations de plusieurs excitations) $S(k, \omega)$ doit alors prendre la forme (7.41), d'où l'on déduit $F_{44}(\omega)$ à l'aide de (7.39) : on retrouve ainsi le résultat (7.29). En utilisant les relations de conservation, on en déduit la partie *longitudinale* de F_{44} et F_{ij} . Quant aux termes transverses de ces deux quantités, ils s'annulent par suite de la symétrie cylindrique de l'élément de matrice autour du vecteur d'onde $\vec{k}$ du phonon. On reproduit ainsi les résultats (7.30) et (7.31).

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons analysé en détail la structure du développement de perturbations d'un système de bosons en interaction. Ceci nous a conduits à mettre

au point une méthode d'analyse diagrammatique permettant de sommer, dans certaines limites, tout le développement de perturbations. Nous avons ainsi démontré

l'identité entre les quasi-particules et les excitations élémentaires, dans la gamme des grandes longueurs d'onde. Cela se traduit mathématiquement par l'identité des pôles de la fonction de Green à une particule et des pôles de la fonction de corrélation de deux excitations élémentaires.

Ce résultat souligne la différence de comportement entre les systèmes de bosons et les supra-conducteurs dont l'analogie est essentiellement formelle. Nous avons en particulier montré que les équations intégrales satisfaites par les noyaux d'interaction ne présentaient pas, dans le cas des bosons, la singularité essentielle qui apparaît dans le cas des supra-conducteurs et qui conduit alors aux modes collectifs situés à l'intérieur du gap. Dans l'optique du problème à N corps, chaque système physique peut être caractérisé par les propriétés du noyau d'interaction de deux excitations correspondant : nous pensons avoir contribué à éclaircir ces caractéristiques dans le cas des bosons.

Les deux difficultés classiques rencontrées par les développements de perturbations dans le cas des bosons se trouvent résolues par notre traitement global. Il est bien évident qu'en sommant tout le développement, nous obtenons des résultats qui peuvent s'appliquer au liquide. Nous pouvons donc confirmer les résultats approchés précédemment obtenus : d'une part la vitesse associée aux phonons est bien la vitesse du son ordinaire dans He II. D'autre part, nos résultats sont en accord avec ceux de Feynman : il n'y a pas de backflow associé aux phonons. Nous pouvons énoncer cette conclusion en

assurant simultanément l'absence de « gap » dans le spectre des excitations élémentaires et la vérification des règles de somme, évitant ainsi le paradoxe inhérent à tout calcul approché.

Nous avons enfin dégagé l'origine physique de la divergence qui apparaît dans les calculs de perturbations de Beliaev dès le second ordre. Cette singularité est due à l'existence d'un point de branchement très voisin du pôle de la fonction de Green à une particule. Elle est intimement liée à la linéarité du spectre des excitations élémentaires dans la région des phonons (Celle-ci entraîne que le seuil de production de deux excitations élémentaires de moment total k est égal à l'énergie du phonon k). Nous avons indiqué un moyen pour surmonter cet écueil, sans pouvoir toutefois le justifier rigoureusement.

Notre traitement ne s'applique qu'au cas d'un système homogène à température nulle. Pour le généraliser aux situations inhomogènes, contenant par exemple des lignes de tourbillon, il faudrait conserver à a_0 et $a_0^\dagger$ leur caractère d'opérateur, ce qui complique considérablement le formalisme. Par contre, la généralisation de nos résultats à une température non nulle semble possible. Elle devrait fournir d'importants renseignements sur la structure des différentes excitations à $T \neq 0$, en particulier sur la manière dont se différencient les quasi-particules de Bogoliubov et les ondes sonores habituelles (identiques lorsque $T = 0$). Il y a là un champ d'étude où les techniques développées dans ce travail doivent pouvoir s'appliquer.

BIBLIOGRAPHIE

- BELIAEV (S. T.). — *J. E. T. P.*, 1958, **34**, 417 ; *Soviet Physics*, **7**, 289.
 BELIAEV (S. T.). — *J. E. T. P.*, 1958, **34**, 433 ; *Soviet Physics*, **7**, 299.
 BLATT (J. M.), BUTLER (S. T.) et SCHAFROTH (M. R.). — *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 481.
 BOGOLIUBOV (N. N.). — *Jour. Phys. USSR*, 1947, **11**, 23.
 BRUECKNER (K. A.). — *Le Problème à N corps*. C. de Witt, Editeur, Dunod, Paris, 1959.
 COHEN (M.) et FEYNMAN (R. P.). — *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 13.
 FEYNMAN (R. P.). — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 262.
 FEYNMAN (R. P.). — *Progress in Low Temperature Physics I*, C. J. Gorter, Editeur, North Holland Amsterdam, 1957.
 FEYNMAN (R. P.) et COHEN (M.). — *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 1189.
 GALITSKII (V.) et MIGDAL (A.). — *J. E. T. P.*, 1958, **34**, 139 ; *Soviet Physics*, **7**, 96.
 GOLDSTONE (J.). — *Proc. Roy. Soc.*, 1957, **A 239**, 267.
 HENSHAW (D. G.). — *Phys. Rev.*, 1960, **119**, 9.
 HENSHAW (D. G.) et WOODS (A. D. B.). — *Phys. Rev.*, 1961, **121**, 1266.
 VAN HOVE (L.). — *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 249.
 HUGENHOLTZ (N. M.) et PINES (D.). — *Phys. Rev.*, 1959, **116**, 489.
 KUBO (R.). — *Jour. Phys. Soc. of Japan*, 1957, **12**, 570.
 LANDAU (L. D.). — *Jour. Phys. USSR*, 1941, **5**, 71.
 LANDAU (L. D.). — *J. E. T. P.*, 1958, **35**, 97 ; *Soviet Physics*, **8**, 70.
 LEE (T. D.), HUANG (K.) et YANG (C. N.). — *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 1135.
 MARTIN (P. C.) et SCHWINGER (J.). — *Phys. Rev.*, 1959, **115**, 1342.
 MILLER (A.), NOZIÈRES (P.) et PINES (D.). — *Phys. Rev.*, 1962, **127**, 1452.
 NAMBU (Y.). — *Phys. Rev.*, 1960, **117**, 648.
 NOZIÈRES (P.). — *Le problème à N corps*, Dunod, Paris, 1962.
 NOZIÈRES (P.) et LUTTINGER (J. M.). — *Phys. Rev.*, 1962, **127**, 1423.
 PINES (D.). — *The Many Body Problem*, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1961.
 PITAEVSKII (L. P., I.). — *J. E. T. P.*, 1959, **36**, 1168 ; *Soviet Physics*, **9**, 830.
 PITAEVSKII (L. P., II.). — *J. E. T. P.*, 1961, **40**, 646 ; *Soviet Physics*, **13**, 451.

ПІТЄВСЬКИЙ (L. P., III). — *J. E. T. P.*, 1959, 37, 1794 ;
Soviet Physics, 10, 1267.
 PLACZEK (G.) et VAN HOVE (L.). — *Phys. Rev.*, 1954, 93,
 1207.

SCHAFROTH (M. R.). — *Solid State Physics*, 10, F. Seitz et
 D. Turnbull, Editeurs, Academic Press New York, 1960.
 SCHAFROTH (M. R.). — *Phys. Rev.*, 1955, 100, 502.

Appendice

Dérivées de G

Pour calculer les dérivées de G, nous utilisons la forme matricielle (5.28) de l'équation de Dyson :

$$\underline{G} = \underline{G}_0 + \underline{G}_0 \underline{M} \underline{G} \quad (\text{A.1})$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\underline{G} = (\underline{I} - \underline{G}_0 \underline{M})^{-1} \underline{G}_0. \quad (\text{A.2})$$

Dérivons (A.1) par rapport à une variable générale x :

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial x} = \frac{\partial \underline{G}_0}{\partial x} (\underline{I} + \underline{M} \underline{G}) + \underline{G}_0 \frac{\partial \underline{M}}{\partial x} \underline{G} + \underline{G}_0 \underline{M} \frac{\partial \underline{G}}{\partial x}.$$

Utilisant la relation (A.2), nous obtenons la forme symétrique suivante :

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial x} = \underline{G} \underline{G}_0^{-1} \frac{\partial \underline{G}_0}{\partial x} \underline{G}_0^{-1} \underline{G} + \underline{G} \frac{\partial \underline{M}}{\partial x} \underline{G}. \quad (\text{A.3})$$

La matrice $\underline{G}_0$ s'écrit :

$$\underline{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 & G_0^+ \\ G_0^- & 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$G_0^\pm(q) = (\pm q^0 + \mu - \varepsilon_q^0 + i\delta)^{-1}.$$

Nous pouvons calculer 5 dérivées différentes de G par rapport aux paramètres suivants :

$$1^\circ x = n_0 :$$

G_0 ne dépend pas de n_0 :

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}(q)}{\partial n_0} = \sum_{\zeta\varepsilon} G^{\alpha\zeta}(q) \frac{\partial M^{\zeta\varepsilon}(q)}{\partial n_0} G^{\varepsilon\beta}(q). \quad (\text{A.4})$$

$$2^\circ x = \mu :$$

$$\frac{\partial G_0^\pm(q)}{\partial \mu} = [G_0^\pm(q)]^2$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\frac{\partial \underline{G}_0}{\partial \mu} = - \begin{pmatrix} 0 & (G_0^+)^2 \\ (G_0^-)^2 & 0 \end{pmatrix} = - \underline{G}_0 \underline{\beta} \underline{G}_0,$$

la matrice $\underline{\beta}$ étant donnée par :

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A.3) s'écrit aussitôt :

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial \mu} = - \underline{G} \underline{\beta} \underline{G} + \underline{G} \frac{\partial \underline{M}}{\partial \mu} \underline{G}$$

correspondant à la forme développée :

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}(q)}{\partial \mu} = \sum_{\zeta\varepsilon} G^{\alpha\zeta}(q) \left[-\delta_{(\zeta,-\varepsilon)} + \frac{\partial M^{\zeta\varepsilon}(q)}{\partial \mu} \right] G^{\varepsilon\beta}(q). \quad (\text{A.5})$$

$$3^\circ x = q^0 : \\ \text{On a :}$$

$$\frac{\partial G_0^\pm(q)}{\partial q^0} = \mp [G_0^\pm(q)]^2$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \underline{G}_0}{\partial q^0} = \underline{G}_0 \underline{\gamma} \underline{G}_0,$$

la matrice $\underline{\gamma}$ étant donnée par :

$$\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A.3) devient alors :

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial q^0} = \underline{G} \underline{\gamma} \underline{G} + \underline{G} \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^0} \underline{G}$$

qui se développe suivant :

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}(q)}{\partial q^0} = \sum_{\zeta\varepsilon} G^{\alpha\zeta}(q) \left[\delta_{(\zeta,-\varepsilon)} (\delta_{(\zeta,+)} - \delta_{(\zeta,-)}) + \frac{\partial M^{\zeta\varepsilon}(q)}{\partial q^0} \right] G^{\varepsilon\beta}(q). \quad (\text{A.6})$$

$$4^\circ x = q_i :$$

$$\frac{\partial G_0^\pm(q)}{\partial q_i} = \frac{q_i}{m} [G_0^\pm(q)]^2.$$

La dérivée de G prendra alors une forme analogue à (A.5), soit :

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}(q)}{\partial q_i} = \sum_{\zeta\varepsilon} G^{\alpha\zeta}(q) \left[\frac{q_i}{m} \delta_{(\zeta,-\varepsilon)} + \frac{\partial M^{\zeta\varepsilon}(q)}{\partial q_i} \right] G^{\varepsilon\beta}(q). \quad (\text{A.7})$$

5° **Changement de référentiel.** — Le moment de toutes les lignes d'un diagramme est augmenté de δq_i . Par exemple, le diagramme $\begin{array}{c} \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \leftarrow \\ q \quad M_2 \quad -q \end{array}$ est remplacé par $\begin{array}{c} \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \leftarrow \\ q+\delta q \quad M_2 \quad -q+\delta q \end{array}$. La variation correspondante des facteurs $G_0^\pm(q)$ est donc donnée par :

$$\frac{\delta G_0^\pm(q)}{\delta q_i} = \pm \frac{q_i}{m} [G_0^\pm(q)]^2.$$

Nous trouverons une forme analogue à (A.6) :

$$\frac{\delta G^{\alpha\beta}(q)}{\delta q_i} = \sum_{\zeta \varepsilon} G^{\alpha\zeta}(q) \left[\frac{q_i}{m} \delta(\zeta, -\varepsilon) (\delta(\zeta, -) - \delta(\zeta, +)) + \frac{\delta M^{\zeta\varepsilon}(q)}{\delta q_i} \right] G^{\varepsilon\beta}(q). \quad (\text{A.8})$$

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Expériences d'interaction électron-positron réalisables
avec un anneau de stockage

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 19 avril 1963.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN ROCHE.

J. GAVORET

Imprimé avec les *Annales de Physique*.

Le Gérant : G. MASSON

DÉPÔT LÉGAL : 1963, 3^e TRIMESTRE, N° D'ORDRE 4081, MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS, PARIS
Printed in France. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A., LAVAL, N° 4674. — 9-1963.



Thèse publiée par les *ANNALES DE PHYSIQUE*, 13^e Série - Tome 8, 1963